L'Hopital feladatok megoldással

immediate

2023. december 14.

Tartalomjegyzék

1. $$\lim_{x\to 1} \frac{5x^2-5}{x-1} =?$$

2. $$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{4}x^5-8}{x^2-4} =?$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} =?$$

4. $$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} =?$$

5. $$\lim_{x\to 0} \frac{5}{3(\mathrm{e}^{5x}-1)} - \frac{1}{3x} =?$$

6. $$\lim_{x\to \infty} x(\mathrm{e}^{1/x}-1) =?$$

7. $$\lim_{x\to \infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x =?$$

Megoldások (rövid):

1. 10
2. 5
3. $\frac{1}{2}$
4. $-\frac{1}{2}$

5. $-\frac{5}{6}$

6. 1

7. $\frac{1}{e}$

Megoldások (hosszú):

1. • 1. megoldás

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-5}{x-1}$$

$5 1^2-5=0$ és $1-1=0$, vagyis "$\frac{0}{0}$" alakú határértékkel van dolgunk.

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-5}{x-1}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(5x^2-5)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{10x}{1}=10$$

• 2. megoldás

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-5}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{5(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{5(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}5(x+1)=10$$

Ábra: Ábra 1a.

2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{4}x^5-8}{x^2-4} \tag{0.1}$$

$\frac{1}{4}2^5-8=0$ és $2^2-4=0$, "$\frac{0}{0}$" alakú.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{4}x^5-8}{x^2-4}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\frac{5}{4}x^4}{2x}=\lim_{x\to 2}\frac{5x^4}{2x}=\lim_{x\to 2}\frac{5x^3}{2}\overset{(*)}{=}5 \tag{0.2}$$

(*)- ez már nem "0/0" alakú.

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=?$$

$1-\cos(0)=0$, $0^2=0$, vis "0/0" alakú.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2}=\frac{1}{2}.$$

A második l'Hopital oka, hogy a határérétk az első l'Hospital alkalmazása után is "0/0" alakú, i.e. $\sin(0)=2\cdot 0=0$.

4.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}=?$$

Önmagában a $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$ és a $\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln(x)}$ határérték sem létezik (**), ám a különbség határértéke már létezik.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-x+1}{\ln(x)(x-1)} \tag{0.3}$$

$\ln(1)-1+1=0$ és $\ln(1)(1-1)=0$, tehát L'Hopitálunk,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-x+1}{\ln(x)(x-1)}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1/x-1}{(x-1)/x+\ln(x)}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-1/x^2}{x^{-2}+1/x}=\frac{-1/1^2}{1^{-2}+1/1}=-\frac{1}{2} \tag{0.4}$$

A második L'Hopitálás oka ($\overset{\text{l'H}}{=}$), hogy a határértékünk továbbra is "0/0" alakú $1/1-1=0$ és $(1-1)/x+\ln(1)=0$.

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5}{3(\mathrm{e}^{5x}-1)}-\frac{1}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{15x-3(\mathrm{e}^{5x}-1)}{9x(\mathrm{e}^{5x}-1)}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{15-15\,\mathrm{e}^{5x}}{45x\,\mathrm{e}^{5x}+9(\mathrm{e}^{5x}-1)}$$
$$\overset{(!)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{5-5\,\mathrm{e}^{5x}}{15x\,\mathrm{e}^{5x}+3(\mathrm{e}^{5x}-1)}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-25\,\mathrm{e}^{5x}}{75x\,\mathrm{e}^{5x}+15\,\mathrm{e}^{5x}+15\,\mathrm{e}^{5x}}=\frac{-5}{6}$$

(!): leosztjuk a számlálót és a nevezőt is 3-mal. Megjegyzés: Az táblára felírt feladat:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\mathrm{e}^{5x}-1)}-\frac{1}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-(\mathrm{e}^{5x}-1)}{(\mathrm{e}^{5x}-1)3x}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3-(5\,\mathrm{e}^{5x}-1)}{5\,\mathrm{e}^{5x}\,3x+3(\mathrm{e}^{5x}-1)}$$

$3-(5\,\mathrm{e}^{5\cdot 0}-1)=3-5=-2$ de $\lim_{x\to 0}5\,\mathrm{e}^{5x}\,3x+3(\mathrm{e}^{5x}-1)=0$, méghozzá, hogyha az x-szel jobbról tratunk a nullába (vagyis a pozitív számok oldaláról), akkor a határérték $-\infty$ ám ha balról (a negatív oldalról), akkor ∞, mivel ekkor az első esetben a kifejezésünk is a pozitív oldalról tart a 0-ba a másodikban pedig a negatívról. Lásd az ábrán: 1b. Így ez a határérték nem létezik.

6.

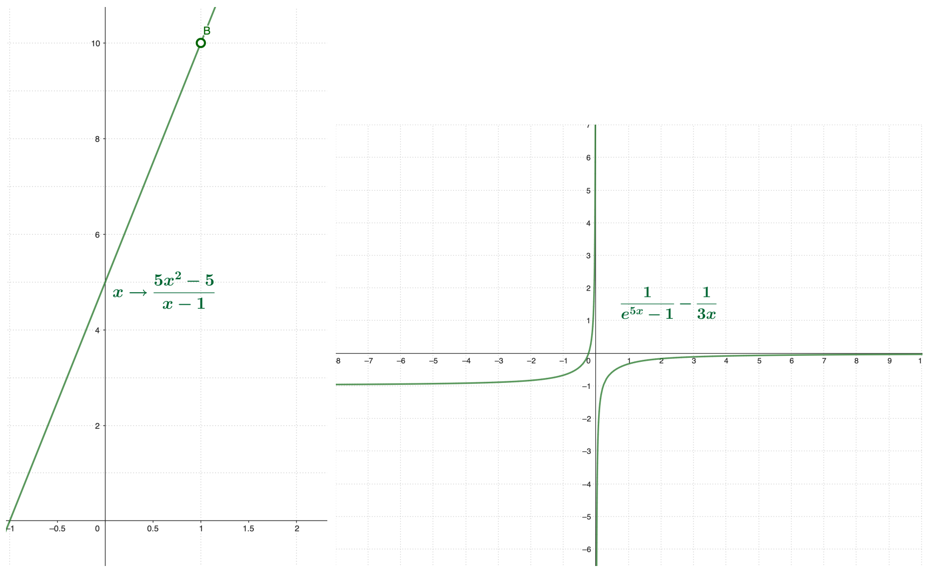
$$\lim_{x\to\infty}x(\mathrm{e}^{1/x}-1)=?$$

Mivel $1/x\to 0$, ahogy $x\to\infty$ ezért $\mathrm{e}^{1/x}-1\to 0$, ahogy $x\to\infty$. A határérték ez alapján "$\infty\cdot 0$" alakú, szóval át kell alakítanunk pl. "0/0" alakúvá. Lássuk:

$$\lim_{x\to\infty}x(\mathrm{e}^{1/x}-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\mathrm{e}^{1/x}-1)}{x^{-1}}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{1/x}(-1/x^2)}{(-1/x^2)}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{1/x}=1$$

7.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=?$$



(a) (b)

1. ábra

Ilyet már láttunk a sorozatoknál, eml. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. Megoldás: ez "$1^\infty$" alakú, amit a szokásos alakra szeretnénk hozni. 1. megfigyelés: $\ln(\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$, a logaritmus és a limesz felcserélhető (***), vagyis (ahogy ma csináltuk a logaritmikus deriváltnál) :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^x} \tag{0.5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right). \tag{0.6}$$

A fenti kifejezés "$\infty \cdot 0$" alakú, átírjuk:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1/x^2}{1-1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{-1+1/x} = -1. \tag{0.7}$$

Most használjuk 0.5-t, és így a határérétkünk:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^x} = \mathrm{e}^{-1} \tag{0.8}$$

(**) - ha jobbról tartunk az 1-be ellentétes előjelű végtelent kapunk, mint ha balról.
(***) - Mivel az ln fgv. folytonos (ahol értelmes).