

Tartalomjegyzék

1. Határozatlan integrál	1
1.1. Polinomok integrálása és egyéb elemi integrálok	1
1.2. $\int \frac{f'}{f}$	1
1.3. $\int f' f^n$	2
1.4. Parciális integrálás	3
1.5. Trigonometrikus integrálok linearizálással	4
1.6. arctg-re visszavezethető integrálok	4
1.7. Parciális törtekre bontás	5
1.8. Spec. racionális törtfüggvények összefoglalás	7
1.9. Helyettesítéssel integrálás	8
2. A határozott integrál geometriai alkalmazásai	9
3. Improprius integrál	11

1. Határozatlan integrál

1.1. Polinomok integrálása és egyéb elemi integrálok

Emlékeztető:

- $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, k \neq -1$
- $\int x^{-1} dx = \ln|x| + c$
- $\int a f(x) + b g(x) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx, a, b \in \mathbb{R}$

Például:

- $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$
- $\int 3x^3 - 4x + 5 dx = 3 \frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^2}{2} + 5x + c$
- $\int \frac{5x^2+7x+3}{\sqrt[3]{x}} dx = \int 5x^{\frac{5}{3}} dx + \int 7x^{\frac{2}{3}} dx + \int 3x^{-\frac{1}{3}} dx = 5 \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} + 7 \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + 3 \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + c$

Bónusz:

- $\int 5 \sin(x) + 7 \cos(x) dx = -5 \cos(x) + 7 \sin(x) + c$
- $\int 2^{x-3} dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8 \ln|2|} \int \ln(2) \cdot 2^x dx = \frac{1}{8 \ln|2|} 2^x$

1.2. $\int \frac{f'}{f}$

Emlékeztető: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

Ennek speciális esete, amit már láttunk, $f(x) = x$, ekkor $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$.
Például:

1. $\int \frac{3x^2}{4+x^3} dx$:

$$f(x) = x^3 + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

Vagyis:

$$\int \frac{3x^2}{4+x^3} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c = \ln|4+x^3| + c$$

2. $\int \frac{x}{2x^2+5} dx$:

$$f(x) = 2x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = 4x$$

Vagyis:

$$\int \frac{x}{2x^2+5} dx = \frac{1}{4} \int 4 \frac{x}{2x^2+5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{4} \ln |f(x)| + c = \frac{1}{4} \ln |2x^2 + 5| + c$$

3. $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx$: $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Vagyis:

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c = \ln |\ln(x)| + c$$

4. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx$:

$$f(x) = e^{2x} + 1 \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}$$

Vagyis:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx &= \frac{1}{2} \int 2 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2} \ln |f(x)| + c = \frac{1}{2} \ln |e^{2x} + 1| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + c \end{aligned}$$

1.3. $\int f' f^n$

Emlékeztető: $\int f'(x) f^n(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$

Megj: Ennek speciális esete, amikor $f(x) = x$, ekkor $\int x^n 1 dx = \int f(x) f'(x) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.
Például:

1. $\int \sin^8(x) \cos(x) dx$

$$f(x) = \sin(x), n = 8, \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

Vagyis:

$$\int \sin^8(x) \cos(x) dx = \int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c = \frac{\sin^9(x)}{9} + c$$

2. $\int x \sqrt{3+2x^2} dx$

$$f(x) = 3 + 2x^2, n = \frac{1}{2}, \Rightarrow f'(x) = 4x$$

Vagyis:

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{3+2x^2} dx &= \frac{1}{4} \int 4x \sqrt{3+2x^2} dx = \frac{1}{4} \int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c \\ &= \frac{(3+2x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{(x^2+3)^3} \end{aligned}$$

3. $\int \frac{1}{x \ln^4(x)} dx$

$$f(x) = \ln(x), n = -4, \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Vagyis:

$$\int \frac{1}{x \ln^4(x)} dx = \int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c = -\frac{\ln^{-3}(x)}{3} + c = -\frac{1}{3 \ln^3(x)}$$

4. $\int \cosh^5(2x) \sinh(2x) dx$

$$f(x) = \cosh(2x), n = 5, \Rightarrow f'(x) = 2 \sinh(2x)$$

Vagyis:

$$\int \cosh^5(2x) \sinh(2x) dx = \frac{1}{2} \int 2 f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c = \frac{1}{2} \frac{\cosh^6(x)}{6} + c$$

1.4. Parciális integrálás

Emlékeztető: $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$

Pl:

- A polinom fokát csökkentjük

$$\int c \cdot \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^x \\ \cosh(x), \sinh(x) \\ \operatorname{tg}(x), \cos(x), \sin(x) \end{array} \right\} dx$$

Ekkor a bevált trükk, hogy a polinomot választjuk $u(x)$ -nek és a másik függvényt $v'(x)$ -nek, lásd alább.

Például:

1. $\int x \cos(x) dx$

$$\int \underset{u'=1}{x} \underset{v=\sin(x)}{\cos(x)} dx = x \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + c$$

2. $\int (2x^2 + 3x - 5)e^x dx$ Ebben az esetben $2x$ kell maj parciálisan integrálnunk.

$$\begin{aligned} \int \underset{u_1=4x+3}{(2x^2+3x-5)} \underset{v_1=e^x}{e^x} dx &= (2x^2+3x-5)e^x - \int \underset{u_2=4}{(4x+3)} \underset{v_2=e^x}{e^x} dx \\ &= (2x^2+3x-5)e^x - \left((4x+3)e^x - \int 4e^x dx \right) = (2x^2+3x-5)e^x - (4x+3)e^x + 4e^x + c \end{aligned}$$

3. $\int x^2 \cosh(x) dx$

$$\begin{aligned} \int \underset{u_1=2x}{x^2} \underset{v_1=\sinh(x)}{\cosh(x)} dx &= x^2 \sinh(x) - \int \underset{u_2=2}{2x} \underset{v_2=\cosh(x)}{\sinh(x)} dx \\ &= x^2 \sinh(x) - \left(2x \cosh(x) - \int 2 \cosh(x) dx \right) = x^2 \sinh(x) - 2x \cosh(x) + 2 \sinh(x) + c \end{aligned}$$

- Logaritmus.

1. $\int x^k \ln(x) dx, k \neq -1$

$$\begin{aligned} \int \underset{u_1=\frac{1}{x}}{\ln(x)} \underset{v_1=\frac{x^{k+1}}{k+1}}{x^k} dx &= \ln(x) \frac{x^{k+1}}{k+1} - \int \frac{1}{x} \frac{x^{k+1}}{k+1} dx = \ln(x) \frac{x^{k+1}}{k+1} - \int \frac{x^k}{k+1} dx \\ &= \ln(x) \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + c \end{aligned}$$

spec. megkapjuk az $\ln(x)$ integrálját, hogyha $k = 0$. (az egyet választani egyébként is jó trükk néha, lásd később.)

- Szorzás 1-gyel.

1. $\int \operatorname{arctg}(x) dx$

$$\int \underset{u_1=\frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctg}(x)} \underset{v_1'=x}{\frac{1}{1+x^2}} dx = \operatorname{arctg}(x)x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x)x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$$

Az utolsó lépéshez lásd a 1.2. fejezetet. Hasonlóan számolhatóak például az inverze trigonometrikus és hiperbolikus függvények integráljai pl. $\int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$, stb. illetve az $\ln(x)$ integrálja (lásd fentebb).

- "Körkörös" integrál (exponenciális · trigonometrikus v. hiperbolikus).

1. $\int e^x \cos(x) dx$

$$\begin{aligned} \int \underset{u_1=\cos(x)}{\cos(x)} \underset{v_1'=e^x}{e^x} dx &= e^x \cos(x) + \int \underset{u_2=\sin(x)}{\sin(x)} \underset{v_2'=e^x}{e^x} dx \\ &= e^x \cos(x) + e^x \sin x - \int e^x \cos(x) dx \end{aligned}$$

Mivel mindkét oldalon előbukkan a keresett integrál, a fentit átrendezve kapjuk, hogy

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\cos(x) + \sin(x)) \text{ vagyis } \int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\cos(x) + \sin(x))}{2} + c.$$

1.5. Trigonometrikus integrálok linearizálással

1. $\int \sin^2(x) dx$

Felhasználva, hogy

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

kapjuk, hogy

$$\int \sin^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4} + c.$$

2. $\int \sin^3(x) dx$

Felhasználva, hogy $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, és, hogy $\cos'(x) = -\sin(x)$ és a 1.3 fejezetben tanultakat kapjuk, hogy

$$\int \sin^3(x) dx = \int (1 - \cos^2(x))(\sin(x)) dx = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + c.$$

3. $\int \sin(x) \sin(2x) dx$

Felhasználva, hogy $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ és a 1.3 fejezetben tanultakat kapjuk, hogy

$$\int \sin(x) \sin(2x) dx = 2 \int \sin^2(x) \cos(x) dx = 2 \frac{\sin^3(x)}{3} + c.$$

1.6. arctg-re visszavezethető integrálok

Emlékeztető: $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$

1. $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$

$$(\operatorname{arctg}(bx))' = \frac{1}{1+(bx)^2} \cdot b$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{2} \int 2 \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x) + c$$

2. $\int \frac{1}{9+4x^2} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{9+4x^2} dx &= \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+\frac{4}{9}x^2} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+(\frac{2}{3}x)^2} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+(\frac{2}{3}x)^2} dx \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{3} \right) + c = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{3} \right) + c \end{aligned}$$

3. $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{1+x^2+2x+1} dx = \int \frac{1}{1+(x+1)^2} dx = \operatorname{arctg}(x+1) + c$$

4. $\int \frac{1}{4x^2-4x+7} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4x^2-4x+7} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2-x+\frac{7}{4}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\frac{3}{2}+(x-\frac{1}{2})^2} dx = \frac{2}{4 \cdot 3} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/\sqrt{2}}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left(x - \frac{1}{2} \right) + c \end{aligned}$$

5. $\int \frac{d}{ax^2+bx+c} dx$ úgy, hogy $b^2-4ac < 0$

$$\int \frac{d}{ax^2+bx+c} dx = \frac{d}{a} \int \frac{1}{x^2+2(b/2a)x+(b/2a)^2+(c/a-(b/2a)^2)} dx$$

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} > 0 \text{ a } b^2-4ac < 0 \text{ feltétel miatt, így legyen } k^2 := \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2}.$$

$$\frac{d}{a} \int \frac{1}{x^2+2(b/2a)x+(b/2a)^2+k^2} dx = \frac{d}{a} \int \frac{1}{(x+(b/2a))^2+k^2} dx,$$

az pedig már benne van a képlet gyűjteményben, de kiírva

$$\frac{d}{a} \int \frac{1}{(x+(b/2a))^2+k^2} dx = \frac{d}{a \cdot k^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+(b/2a)}{k}\right)^2+1} dx = \frac{d}{a \cdot k} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+(b/2a)}{k} \right) + c$$

1.7. Parciális törtekre bontás

1. $\int \frac{1}{x^2-1} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-1} dx &= \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = * \\ \frac{1}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx-B}{(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

$$Ax+Bx+A-B=1 \text{ vagyis } A+B=0 \text{ és } A-B=1, \text{ tehát } B=-\frac{1}{2}, A=\frac{1}{2}$$

$$* = \int \frac{1}{2(x-1)} dx - \int \frac{1}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln|x+1|) + c$$

2. $\int \frac{1}{2x^2+3x-5} dx$

$$\int \frac{1}{2x^2+3x-5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-1)(x+\frac{5}{2})} dx = *$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+5/2)} = \frac{Ax + \frac{5}{2}A + Bx - B}{(x+5/2)(x-1)}$$

$$A + B = 0 \text{ és } \frac{5}{2}A - B = 1, \text{ tehát } B = -\frac{2}{7}, A = \frac{2}{7}$$

$$* = \int \frac{1}{7(x-1)} dx - \int \frac{1}{7(x+\frac{5}{2})} dx = \frac{1}{7}(\ln|x-1| - \ln|x+\frac{5}{2}|) + c$$

$$3. \int \frac{5x-4}{x^2-x-2} dx$$

$$\int \frac{5x-4}{x^2-x-2} dx = \int \frac{5x-4}{(x-2)(x+1)} dx = *$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{Ax + A + Bx - 2B}{(x+1)(x-2)}$$

$$A + B = 5 \text{ és } A - 2B = -4, \text{ tehát } B = 3, A = 2$$

$$* = \int \frac{2}{(x-2)} dx - \int \frac{3}{x+1} dx = 2 \ln|x-2| + 3 \ln|x+1| + c$$

$$4. \int \frac{5x+7}{x^2-6x+9} dx$$

$$\int \frac{5x+7}{x^2-6x+9} dx = \int \frac{5x+7}{(x-3)^2} dx = *$$

parciális törtekre bontással:

$$\frac{5x+7}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} = \frac{Ax-3A+B}{(x-3)^2},$$

tehát, $A = 5$, $B = 7 + 15 = 22$, így

$$* = \int \frac{5}{x-3} + \frac{22}{(x-3)^2} dx = 5 \cdot \ln|x-3| - 22 \cdot (x-3)^{-1} + c$$

$$5. \int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x} dx$$

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x} dx = \int \frac{x+2}{x(x-1)^2} dx = *$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{(x-1)^2x} =$$

$$x^2 : A + B = 0$$

$$x : -2A - B + C = 1$$

$$\text{const} : A = 2$$

így $A = 2$, $C = 3$ és $B = -2$

$$* = \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx = 2 \ln|x| - 2 \ln|x-1| + \frac{3}{x-1} + c$$

6. $\int \frac{1}{x^3+x} dx$

$$\int \frac{1}{x^3+x} dx = \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx = *$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{(x^2+1)x}$$

$$x^2 : A + B = 0$$

$$x : C = 0$$

$$\text{const} : A = 1$$

így $A = 1$, $C = 0$ és $B = -1$

$$* = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + c$$

7. $\int \frac{x^2+3x-3}{x-1} dx$ Ha elosztjuk x^2+3x-3 -t $x-1$ -gyel az eredmény $(x+4)$ a maradék pedig 1, vagyis:

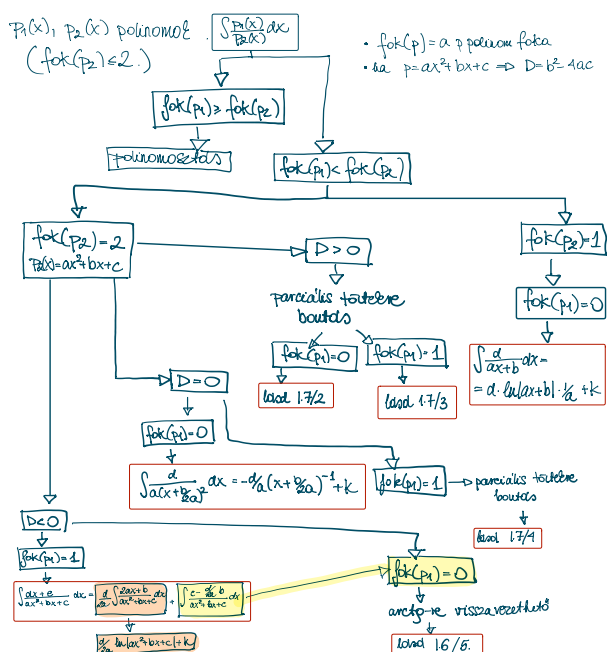
$$\int \frac{x^2+3x-3}{x-1} dx = \int x+4 + \frac{1}{x-1} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + \ln|x-1| + c$$

1.8. Spec. racionális törtfüggvények összefoglalás

Olyan racionális törtfüggvényeket nézünk ahol a

$$\frac{\text{polinom}_1}{\text{polinom}_2} \text{-ben}$$

polinom_2 legfeljebb másodfokú.



1.9. Helyettesítéssel integrálás

$$\text{Emlékeztető: } \int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

Példák:

1. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

A helyettesítés:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{x} \\ x &= g(t) = t^2 \\ \frac{dx}{dt} &= 2t \end{aligned}$$

Tehát

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t}{1+t} dt = 2 \int \frac{1+t}{1+t} dt - 2 \int \frac{1}{1+t} dt = 2t - 2 \ln |1+t| + c = 2(\sqrt{x} - \ln |1+\sqrt{x}|) + \hat{c}$$

2. $\int e^{\sqrt[3]{x+2}} dx$

A helyettesítés:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[3]{x+2} \\ x &= g(t) = t^3 - 2 \\ \frac{dx}{dt} &= 3t \end{aligned}$$

Tehát 2 parciális deriválással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt[3]{x+2}} dx &= 3 \int e^{t^3} dt = 3e^{t^3} - 6 \int e^{t^3} t^2 dt = 3e^{t^3} - 6te^t + 6 \int e^t dt = 3e^t(t^2 - 2t + 2) + c \\ &= 3e^{\sqrt[3]{x+2}}(\sqrt[3]{x+2}^2 - 2\sqrt[3]{x+2} + 2) + \hat{c}. \end{aligned}$$

3. $\int e^t \sin(e^t) dt$ $f(x) = \sin(x)$, $g(t) = e^t$, $g'(t) = e^t$, $x = g(t)$

$$\int e^t \sin e^t dt = \int g'(t)f(g(t)) dt = \int f(x)dx = \int \sin(x) dx = \cos(x) + c = \cos(e^t) + \tilde{c}$$

Trükkösebbek:

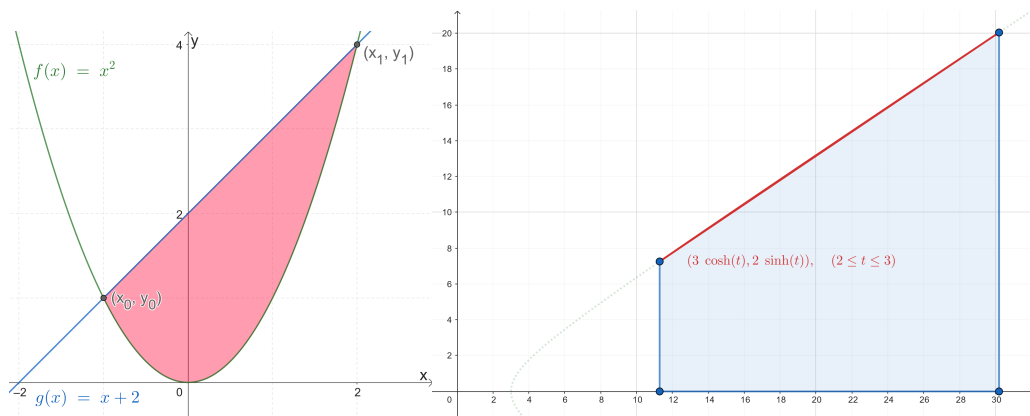
4. $\int \sqrt{1-x^2} dx$

$$\begin{aligned} x &= \sin(t) \\ \frac{dx}{dt} &= \cos(t) \\ t &= \arcsin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int \cos^2(t) dt = \int \frac{\cos(2t)+1}{2} dt \\ &= \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + c = \frac{2\sin(t)\cos(t)}{4} + \frac{t}{2} + c = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x) + \tilde{c} \end{aligned}$$

5. $\int x^2 \sqrt{x^2+1} dx$

$$\begin{aligned} x &= \sinh(t) \\ \frac{dx}{dt} &= \cosh(t) \\ t &= \operatorname{arsh}(x) \end{aligned}$$



1. ábra. Görbék közti és paraméteresen adott görbe alatti terület.

A hiperbolikus függvényekre vonatkozó azonosságokból:

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \sqrt{1+x^2} dx &= \int \sqrt{1+\sinh^2(t)} \sinh^2(t) \cosh(t) dt = \int (\sinh(t) \cosh(t))^2 dt = \int \left(\frac{\sinh(2t)}{2} \right)^2 dt \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{\cosh(4t) - 1}{2} dt = \frac{1}{32} (\sinh(4t) - 4t) + c = \frac{1}{32} (2 \sinh(2t) \cosh(2t) - 4t) + c \\
 &= \frac{1}{32} (4 \sinh(t) \cosh(t) (\cosh^2(t) + \sinh^2(t)) - 4t) + c = \frac{1}{8} (x \sqrt{1+x^2} (2x^2 + 1) - \operatorname{arsh}(x)) + c
 \end{aligned}$$

2. A határozott integrál geometriai alkalmazásai

1. Görbék közti terület

Számoljuk ki az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = x + 2$ függvények közti terület nagyságát. (Lásd a piros területet az 1 ábrán)

1.lépés: Számoljuk ki, hogy a két görbe milyen x_0, x_1 pontban metszi egymást (mely pontokban egyezik meg függvény érték). 2. lépés: Számoljuk ki a nagyobb és a kisebb különbségének integrálját x_0 és x_1 közt.

Vagyis: 1.lépés:

$$x^2 = x + 2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \implies x_0 = -1, x_1 = 2$$

2.lépés:

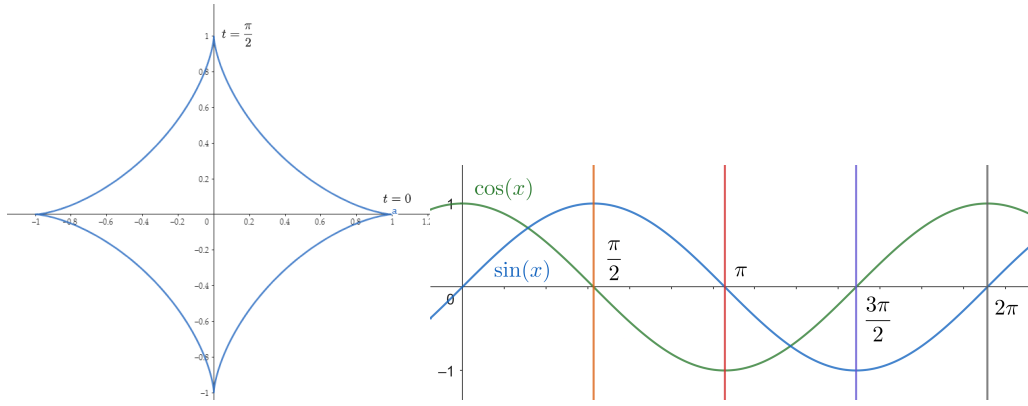
$$\int_{-1}^2 x + 2 - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

2. Görbék alatti terület

Adjuk meg az $x(t) = 3 \cosh(t)$ $y(t) = 2 \sinh(t)$ paraméteresen adott görbe alatti T területét a $t \in [2, 3]$ intervallumon. (Lásd az 1 ábrát)

$$\begin{aligned}
 T &= \int_2^3 y(t) \dot{x}(t) dt = \int_2^3 2 \sinh(t) 3 \sinh(t) dt = \int_2^3 6 \sinh^2(t) dt \\
 &= 3 \int_2^3 \frac{2 \cosh(2t) - 2}{2} dt = \frac{3}{2} [\sinh(2t) - 2t] = \frac{3}{2} (\sinh(6t) - \sinh(4t) - 2)
 \end{aligned}$$

3. Ívhossz



2. ábra

- (a) Számoljuk ki az $f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ függvénnyel adott görbe ívhosszát a $0 \leq x \leq 3$ intervallumon. A képlet megtalálható a képletgyűjteményben:

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (x^2 + 2)^{1/2} \cdot 2x = x(x^2 + 2)^{1/2} \\ 1 + (f'(x))^2 &= 1 + x^2(x^2 + 2) = 1 + x^4 + 2x^2 = (x^2 + 1)^2 \\ \sqrt{1 + (f'(x))^2} &= |x^2 + 1| = x^2 + 1. \end{aligned}$$

Tehát behelyettesítve

$$\int_0^3 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^3 x^2 + 1 dx = 12$$

- (b) Számoljuk ki az $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$ paraméteresen adott görbe ívhosszát a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumon. A képletgyűjtemény utolsó oldalán megtalálható a képlet

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (2.2)$$

ahol $\dot{x}, \dot{y}$ az x és y t szerinti deriváltjait jelöli.

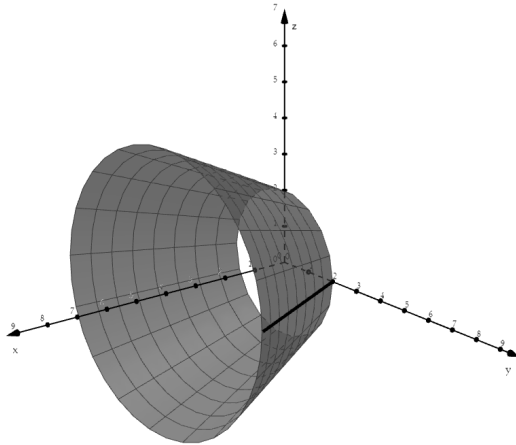
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3 \cos^2(t)(-\sin(t)), \quad \dot{y} = 3 \sin^2(t) \cos(t) \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= 9 \cos^4(t) \sin^2(t) + 9 \sin^4(t) \cos^2(t) \\ \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= 3 \sqrt{\cos^2(t) \sin^2(t) (\sin^2(t) + \cos^2(t))} = 3 |\cos(t) \sin(t)|. \end{aligned}$$

A görbe szimmetrikus az x és az y tengelyre (lásd 2 ábra), ezért elég kiszámolni az ívhosszt a $0 \leq \pi/2$ intervallumon és azt megszorozni 4-gyel. Ezen az intervallumon a $\sin(t) \cos(t)$ nem negatív (lásd 2 ábrát), így a $3 \cos(t) \sin(t)$ függvényt kell integrálnunk az intervallumon.

$$\hat{s} = \int_0^{\pi/2} 3 \cos(t) \sin(t) dt = 3 \left[\frac{\sin^2(t)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}$$

Így a teljes ívhossz $4 \cdot 3/2 = 6$. Megj. látható, hogy ha nem vennénk figyelembe az abszolútérték jelenlétét és integrálnánk az egész $[0, 2\pi]$ intervallumon az jönne ki, hogy az ívhossz 0, ami nyilván nem lehet igaz.

4. Forgástest térfogata



3. ábra

- (a) Számoljuk ki annak a testnek a térfogatát, amelyet úgy kapunk, hogy az $f(x) = 2 + 0.5x$ függvénnyel adott görbét az x -tengely körül megforgatjuk majd tekintjük a kapott test $0 \leq x \leq 4$ közötti részét. (Lásd a 3 ábrát.)

A képltegyüjteményből a térfogatot az alábbi módon számolhatjuk:

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_1} f^2(x) dx.$$

Jelen esetben $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ és $f^2(x) = (0.5x + 2)^2$, tehát

$$V = \pi \int_0^4 (0.5x + 2)^2 dx = \left[2\pi \frac{(0.5x + 2)^3}{3} \right]_0^4 = \pi \frac{112}{3}.$$

3. Impropius integrál

Az alábbi esetekben döntsük el, hogy a megadott integrálok konvergensek vagy divergensek. Ha konvergensek számoljuk ki az értéküket.

A/ Nem korlátos intervallumon vett integrál

(a) $\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$

$$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_{10}^d \frac{1}{x \ln(x)} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} [\ln |\ln(x)|]_{10}^{\infty} = \lim_{d \rightarrow \infty} \ln(\ln(d)) - \ln(\ln(10)) = \infty$$

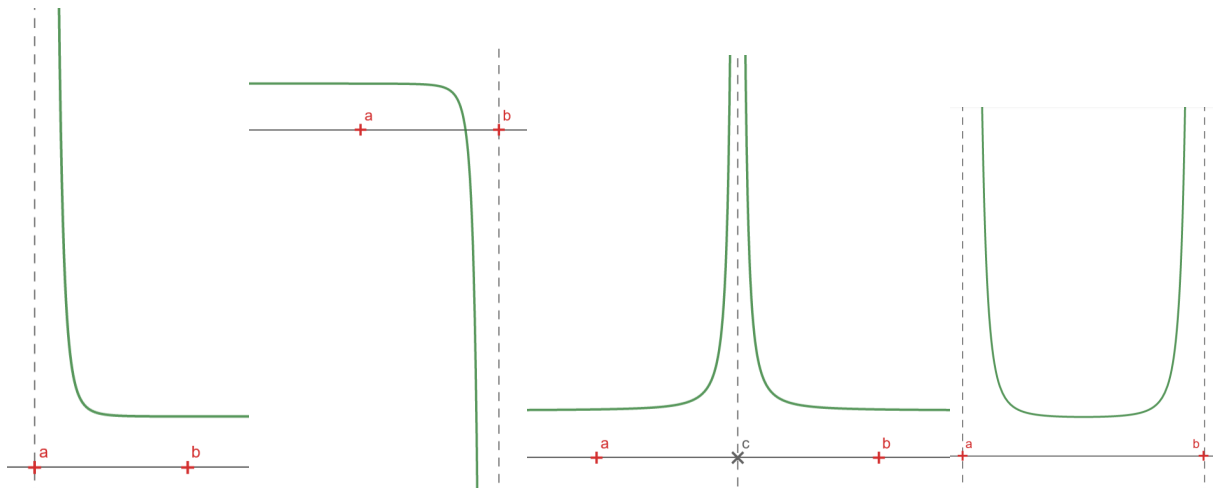
Az integrál divergens.

(b) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 e^x dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} e^0 - e^c = 1$$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+100x^2} dx$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+100x^2} dx &= \lim_{d \rightarrow \infty} \int_d^c \frac{1}{1+100x^2} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \left[\frac{\arctg(10x)}{10} \right]_d^c \\ &= \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\arctg(10c)}{10} - \frac{\arctg(10d)}{10} = \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$



4. ábra. Sorban az 1., 2., 3., 4. eset a felsorolásból.

- (d) Milyen t értékekre konvergens a $\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^t} dx$ integrál? Tegyük fel, hogy $t \neq 1$, hiszen ezt már az (a) részben megvizsgáltuk. Ebben az esetben

$$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^t} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_{10}^d \frac{1}{x(\ln(x))^t} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln(x)^{-t+1}}{-t+1} \right]_{10}^{\infty} = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\ln(d)^{-t+1}}{-t+1} - \frac{\ln(10)^{-t+1}}{-t+1}$$

$\frac{\ln(10)^{-t+1}}{-t+1} < \infty$, ha $t \neq 1$. Mivel $\lim_{d \rightarrow \infty} \ln(d) \rightarrow \infty$, $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\ln(d)^{-t+1}}{-t+1}$ konvergens, akkor és csak akkor, ha $-t+1 < 0$, ami teljesül a.c.s.a $t > 1$. Megj: látjuk, hogy az (a) részbeli "éppenhogy" nem konvergens.

B/ Korlátos intervallum, nem korlátos függvény

A függvény

1. folytonos $(a, b]$ -n és nem korlátos, ahogy jobbról tartunk a -ba,
2. folytonos $[a, b)$ -n és nem korlátos, ahogy balról tartunk b -be,
3. folytonos az $[a, c]$ és $(c, b]$ intervallumokon, nem korlátos, hogyha tartunk c -be
4. folytonos (a, b) -n nem korlátos ahogy jobbról tartunk a -ba, sem ahogy balról tartunk b -be,

lásd a 4 ábrát.

(a) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$

A 2. eset áll fent, i.e. a függvény az $x = 3$ pontban szakad, mivel $\sqrt{9-x^2}|_{x=3} = 0$.

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \lim_{c \rightarrow 3^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \lim_{c \rightarrow 3^-} [\arcsin(x/3)]_0^c = \frac{\pi}{2} - 0, \quad (3.1)$$

i.e. az integrál *konvergens*.

(b) $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$

Itt a 3. esettel van dolgunk hiszen a függvény mindenhol folytonos, kivéve az $x = 1$ pontban, és $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^{2/3}} = \infty$.

Megoldás:

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \int_1^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx \quad (3.2)$$

$$= \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \lim_{d \rightarrow 1^+} \int_d^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx \quad (3.3)$$

A két integrált külön tárgyaljuk. Az első rész:

$$\lim_{c \rightarrow 1-} \int_0^c \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = \lim_{c \rightarrow 1-} \left[3(x-1)^{1/3} \right]_0^c = \lim_{c \rightarrow 1-} 3(c-1)^{1/3} + 3 = 3. \quad (3.4)$$

És a második:

$$\lim_{d \rightarrow 1+} \int_d^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = 3 \cdot 2^{1/3} - 0. \quad (3.5)$$

Így az integrál *konvergens*, és $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = 3(1 + 2^{1/3})$

(c) $\int_0^3 (x-1)^{-1} dx$.

Mint az előző esetben itt is az 1 a kritikus pont.

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)} dx + \int_1^3 \frac{1}{(x-1)} dx = \lim_{c \rightarrow 1-} \int_0^c \frac{1}{(x-1)} dx + \lim_{d \rightarrow 1+} \int_d^3 \frac{1}{(x-1)} dx \quad (3.6)$$

Az első tag:

$$\lim_{c \rightarrow 1-} \int_0^c \frac{1}{(x-1)} dx = \lim_{c \rightarrow 1-} [\ln |x-1|]_0^c = \lim_{c \rightarrow 1-} \ln |c-1| - \ln(1) = -\infty.$$

Az integrál eszerint *divergens*.