

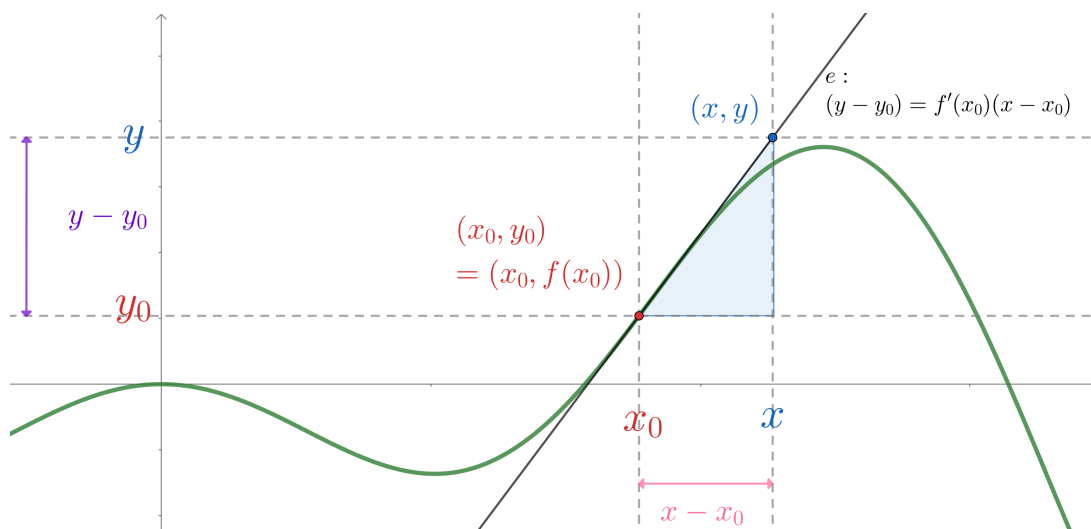
Tartalomjegyzék

1. x^k	1
2. Érintőegyenés	2
3. Egyéb függvények deriváltjai	4
4. Függvények szorzatának deriváltjai	5
5. Összetett függvények és deriváltjaik (Láncszabály)	5
5.1. Összetett függvények	5
5.2. A láncszabály	5
6. Függvények hányadosainak deriváltjai	6
7. Logaritmikus derivált	7
8. L'Hôpital szabály	8
9. Függvényvizsgálat	11
9.1. Monotonitás és lokális szélsőértékek	11
9.2. Konvexitás	13
9.3. Teljes függvényvizsgálat	14
10. Szöveges szélsőérték feladatok	16
11. Implicit függvény deriválása	18
12. Paraméteresen adott függvény deriváltja	19
13. Taylor polinomok	21

1. x^k

Például:

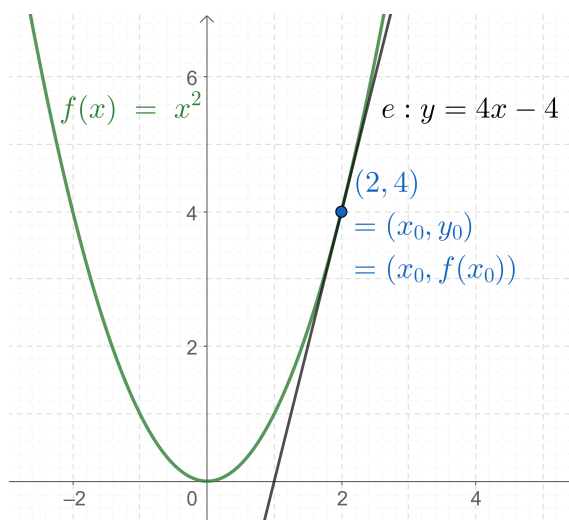
<i>Emlékeztető:</i> $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$ Néhány hasznos hatványozási azonosság: • $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$ • $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ • $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ • $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ • $\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}$ • $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ • $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$	• $(x^2)' = 2x$ • $(x^8)' = 8x^7$ • $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$ • $(3x^{18})' = 18 \cdot 3x^{17} = 54x^{17}$ • $(x^{-4} \cdot x^7)' = (x^3)' = 3x^2$ • $(x^9 - x^5)' = 9x^8 - 5x^4$ • $(4x^2 + 5x)' = 8x + 5$ • $(7x^3 - 6x + 3)' = 3 \cdot 7 \cdot x^2 - 6$ • $\left(\frac{9x^2+27x}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(9\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} + 27\frac{x}{\sqrt[3]{x}}\right)' =$ $\left(9x^{5/3} + 27x^{2/3}\right)' = \frac{5}{3} \cdot 9x^{2/3} + 27 \cdot$ $\frac{2}{3}x^{-1/3}$
---	---



1. ábra. Az érintőegyenés.

1. Feladat: Határozzuk meg

- az $f(x) = x^2$ parabola $(2, 4)$ pontjában vett érintőjének egyenletét.
- a $g(x) = x^3$ függvény $(-2, -8)$ pontbeli érintőegyenésének egyenletét.
- az $f(x) = x^2$ parabola azon pontját és a pontban vett érintőjét, ahol az érintő párhuzamos a $y = -6x + 4$ egyenletű egyenessel.
- a $g(x) = x^3$ függvény azon pontjait és a pontbeli érintőit, ahol az érintő párhuzamos az $y = 12x + 3$ egyenletű egyenessel.
- az $f(x) = x^2$ parabola azon pontjait és a hozzájuk tartozó érintő egyenesek egyenleteit, amelyekbeli érintő átmegy a $(0, -4)$ ponton.



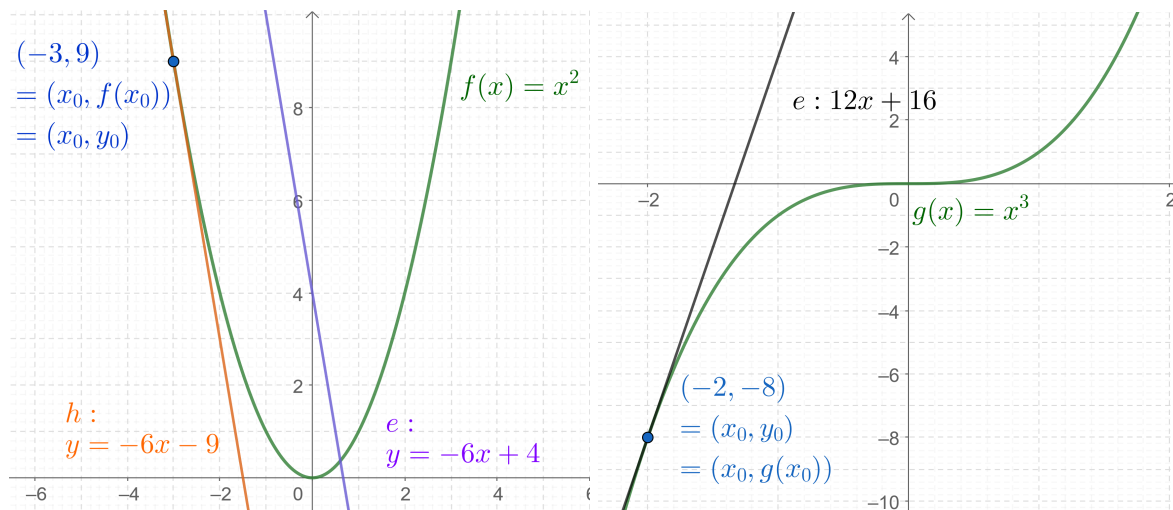
2. ábra. 1. Feladat (a)

Megoldás:

2. Érintőegyenés

Emlékeztető: Ha az f függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor az f x_0 -beli érintőjének meredeksége $f'(x_0)$, vagyis az érintőegyenés egyenlete $y_0 = f(x_0)$ jelöléssel:

$$(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



3. ábra. 1. Feladat (b) és (c).

(a) (Lásd a 2. ábrát) Az emlékeztető alapján az $f(x) = x^2$ parabola $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét megkaphatjuk az alábbi képletből:

$$(x - x_0) f'(x_0) = (y - y_0).$$

Jelen esetben a parabola $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0)) = (2, 4)$ pontja érdekel bennünket. Ehhez még szükségünk van a $f'(x_0)$ értékére. $f'(x) = 2x$ és $x_0 = 2$, tehát $f'(x_0) = 4$. Így az e érintőegyenes egyenlete:

$$(y - 4) = 4(x - 2) \text{ vagyis } e : y = 4x - 4$$

(b) (Lásd a 3. ábrát) Ebben az esetben $x_0 = -2$, $y_0 = g(x_0) = -8$. A függvény deriváltja egy x pontban $g'(x) = 3x^2$, tehát $g'(x_0) = g'(-2) = 12$. Így az egyenlet:

$$(y - (-8)) = 12(x + 2) \text{ vagyis } e : y = 12x + 16$$

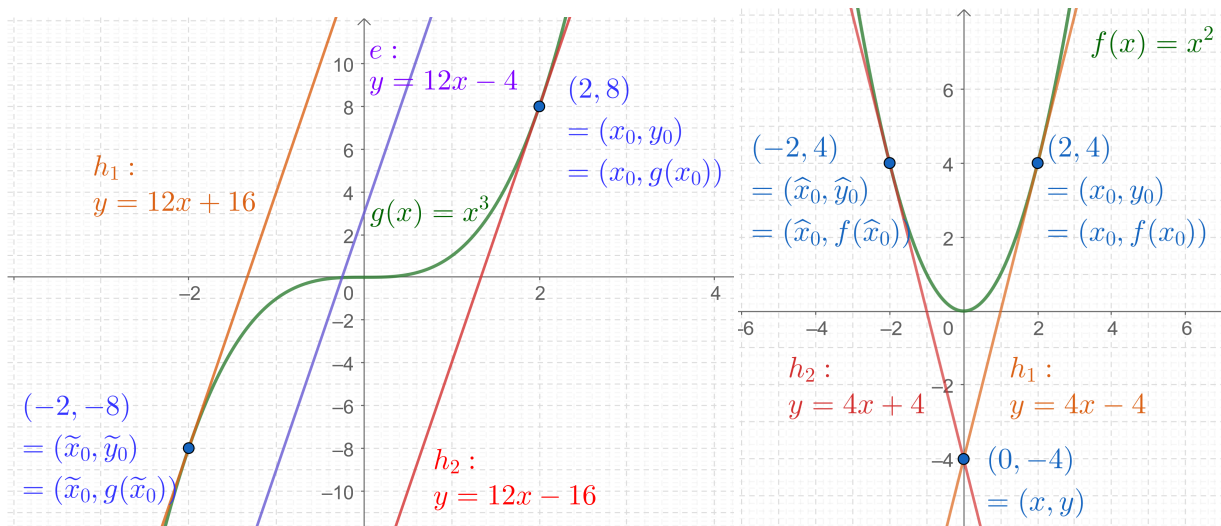
(c) (Lásd a 3. ábrát) Két egyenes pontosan akkor párhuzamos, hogyha a meredekségük megegyezik. Az $(x_0, f(x_0))$ -beli érintő egyenes meredeksége $f'(x_0)$, míg az előre megadott $e : y = -6x + 4$ egyenesé $m_e = -6$. Ez alapján azt az x_0 pontot és $(x_0, f(x_0))$ -beli érintőt keressük, melyre teljesül, hogy $f'(x_0) = -6$. Mivel $f'(x) = 2x$, ezért $f'(x_0) = 2x_0 = -6$, vagyis $x_0 = -\frac{6}{2} = -3$. Így kapjuk, hogy a keresett $(x_0, f(x_0))$ pontja a parabolának a $(-3, -27)$, mely pontbeli érintő egyenlete az általános képlet alapján:

$$(y - (-27)) = -6(x - (-3)) \text{ vagyis } y = -6x + 9$$

(d) (Lásd a 4. ábrát) Hasonlóan az előző feladat megoldásához, azt az x_0 pontot keressük, amelyre igaz, hogy $g'(x_0)$ egyenlő az feladatban megadott $y = 12x + 3$ egyenletű egyenes meredekségével. Az egyenes meredeksége 12, $g'(x) = 3x^2$, tehát keressük azt az x_0 pontot, melyre teljesül, hogy: $12 = 3x_0^2$, vagyis, hogy $x_0^2 = 4$. Ennek az $x_0 = 2$ és az $\widetilde{x}_0 = -2$ tesz eleget, tehát a keresett pontok: $(2, 8)$ és $(-2, -8)$, mely pontokban az érintő egyenesek egyenletei:

$$\begin{aligned} (2, 8) : & \quad (y - 8) = 12(x - 2) \text{ vagyis } y = 12x - 16 \\ (-2, -8) : & \quad (y + 8) = 12(x + 2) \text{ vagyis } y = 12x + 16 \end{aligned}$$

(e) (Lásd a 4 ábrát) Ez esetben nem ismerjük sem az érintő meredekségét sem pedig a parabola pontját, amelyen az érintő egyenes átmegy, viszont ismerjük az érintő egyenes egy pontját, a $(0, -4)$ -et. Vagyis a szokásos egyenletünkéből az x -et és az y -t. Behelyettesítve az érintő egyenletébe a következőt kapjuk: $(-4 - y_0) = f'(x_0)(0 - x_0)$. Mivel $y_0 = f(x_0) = x_0^2$ és $f'(x_0) = 2x_0$, ebből adódik: $(-4 - x_0^2) =$



4. ábra. 1. Feladat (d) és (e)

$2x_0(-x_0)$, vagyis $4 = x_0^2$, melyből kapjuk, hogy $x_0 = \pm 2$. Vagyis a pontjaink és hozzájuk tartozó egyenletek:

$$(2, 4) : (y - 4) = 4(x - 2) \text{ vagyis } y = 4x - 4 \quad (2.1)$$

$$(-2, 4) : (y - 4) = 4(x + 2) \text{ vagyis } y = 4x + 4. \quad (2.2)$$

3. Egyéb függvények deriváltjai

Emlékeztető:

- $(c^x)' = c^x \ln c$

2. Feladat: Számoljuk ki az alábbi függvények deriváltjait.

(a) $(4x^2 + 10^x)$

(b) $(14x^2 + \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} - \text{sh}(x))$

(c) $(3^{x+2} + (6x + 2)^2)$

(d) $(\text{arsh}x + \arccos x)$

Megoldás:

(a) $(4x^2 + 10^x)' = (4x^2)' + (10^x)' = (4 \cdot 2 \cdot x) + (10^x \ln 10)$

(b) $(14x^2 + \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} - \text{sh}(x))' = (14x^2)' + (x^{-2/5})' - (\text{sh}x)' = 28x - \frac{2}{5}x^{-7/5} - \cosh x$

(c) $(3^{x+2} + (6x + 2)^2)' = (9 \cdot 3^x)' + (36x^2 + 24x + 4)' = 93^x \ln 3 + 72x + 24$

(d) $(\text{arsh}x + \arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

4. Függvények szorzatának deriváltjai

$$\text{Emlékeztető: } (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

3. Feladat: Számoljuk ki az alábbi függvények deriváltjait.

(a) $(5x \cdot \operatorname{sh} x)$

(b) $((9x^2 + 3x + 2) \operatorname{arctg} x)$

(c) $(5x^4 \cdot 2^x \operatorname{tg} x)$

Megoldás:

(a)

$$\begin{aligned}(5x \cdot \operatorname{sh} x)' &= (5x)' \operatorname{sh} x + 5x \cdot \operatorname{sh}' x \\ &= 5 \operatorname{sh} x + 5x \cdot \operatorname{ch} x\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}((9x^2 + 3x + 2) \operatorname{arctg} x)' &= (9x^2 + 3x + 2)' \operatorname{arctg} x + (9x^2 + 3x + 2) (\operatorname{arctg} x)' \\ &= (18x + 3) \operatorname{arctg} x + (9x^2 + 3x + 2) \frac{1}{1 + x^2}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}(5x^4 \cdot 2^x \cdot \operatorname{tg} x)' &= (5x^4 \cdot 2^x)' (\operatorname{tg} x) + (5x^4 \cdot 2^x) (\operatorname{tg} x)' \\ &= ((5x^4)' 2^x + 5x^4 (2^x)') (\operatorname{tg} x) + (5x^4 \cdot 2^x) \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= (20x^3 \cdot 2^x + 5x^4 \cdot 2^x \ln 2) (\operatorname{tg} x) + (5x^4 \cdot 2^x) \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

5. Összetett függvények és deriváltjaik (Láncszabály)

5.1. Összetett függvények

Példa: Legyen $f(x) = e^{4x^2+2}$, ekkor ha

$$g(z) = e^z$$

$$h(x) = 4x^2 + 2, \text{ akkor } f(x) = g(h(x)) = e^{h(x)} = e^{4x^2+2}.$$

Általában, az $f(x) = g(h(x))$ alakú függvényeket *összetett függvényeknek* nevezzük.

Példák:

$$f(x) = (3x^2 + 5)^7:$$

$$f(x) = \sin(3 + e^x):$$

$$f(x) = \sqrt[3]{17 + \ln(x)}:$$

$$\bullet g(z) = z^7$$

$$\bullet g(z) = \sin(z)$$

$$\bullet g(z) = \sqrt[3]{z}$$

$$\bullet h(x) = 3x^2 + 5$$

$$\bullet h(x) = 3 + e^x$$

$$\bullet h(x) = 17 + \ln(x)$$

5.2. A láncszabály

$$\text{Emlékeztető: } (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

4. Feladat: Határozzuk meg

(a) $f(x) = e^{2x}$

(b) $f(x) = e^{3x^2+9}$

- (c) $f(x) = \sqrt{73 + \sqrt{x}}$
 (d) $f(x) = (3x^8 + 9x^2)^{11}$

Megoldás:

(a) $f(x) = g(h(x))$, ahol $g(z) = e^z$, $h(x) = 2x$, $g'(z) = g(z) = e^z$, $h'(x) = 2$, tehát az emlékeztetőbeli képlet alapján

$$f'(x) = g'(h(x)) h'(x) = 2 \cdot e^{2x}.$$

(b) $f(x) = g(h(x))$, ahol $g(z) = e^z$, $h(x) = 3x^2 + 9$, $g'(z) = g(z) = e^z$, $h'(x) = 6x$, tehát az emlékeztetőbeli képlet alapján

$$f'(x) = g'(h(x)) h'(x) = e^{3x^2+9} \cdot 6x.$$

(c) $f(x) = g(h(x))$, ahol $g(z) = \sqrt{z}$, $h(x) = 73 + \sqrt{x}$, $g'(z) = \frac{1}{2}z^{-1/2}$, $h'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, tehát az emlékeztetőbeli képlet alapján

$$f'(x) = g'(h(x)) h'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{73 + \sqrt{x}}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

(d) $f(x) = g(h(x))$, ahol $g(z) = z^{11}$, $h(x) = 3x^8 + 9x^2$, $g'(z) = 11z^{10}$, $h'(x) = 24x^7 + 18x$, tehát az emlékeztetőbeli képlet alapján

$$f'(x) = g'(h(x)) h'(x) = 11 \cdot (3x^8 + 9x^2)^{10} (24x^7 + 18x).$$

6. Függvények hányadosainak deriváltjai

Emlékeztető: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

5. Feladat: (a) Vezessük le az emlékeztetőbeli képletet a szorzás- és láncszabály segítségével.
 (b) Számoljuk ki $\operatorname{tg}(x)$ deriváltját a függvények hányadosának deriváltjára vonatkozó szabály segítségével.
 (c) Számoljuk ki az alábbi függvények deriváltját:
- i) $\frac{x^2 - \sin(x)}{\ln(x)}$
 - ii) $\frac{6x12^x}{e^{3x}}$

Megoldás:

(a)

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' \\ &\stackrel{(*)}{=} f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ &\stackrel{(**)}{=} \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg}(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\ &= \frac{\cos(x)}{\cos(x)} - \frac{(-\sin(x)\cos(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

(*): szorzatderiválás.

(**): $(g(x)^{-1})' = -1(g(x))^{-2}$

i)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 - \sin(x)}{\ln(x)}\right)' &= \frac{(x^2 - \sin(x))' \cdot \ln(x) - (x^2 - \sin(x)) \cdot (\ln(x))'}{\ln^2(x)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{(2x - \cos(x)) \ln(x) - x + \frac{\sin(x)}{x^2}}{\ln^2(x)} \end{aligned}$$

(*): $(x^2 - \sin(x))' = 2x - \cos(x)$ ill. $\ln(x)' = x^{-1}$

ii)

$$\left(\frac{6x12^x}{e^{3x}}\right)' = \frac{(6x12^x)' e^{3x} - 6x12^x (e^{3x})'}{e^{6x}}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{6 \cdot 12^x e^{3x} + 6x \cdot 12^x \ln(12) - 18x \cdot 12^x \cdot e^{3x}}{e^{6x}}$$

$$\begin{aligned} (*) &: (6x12^x)' \\ &= (6x)'12^x + 6x(12^x)' \\ &= 6 \cdot 12^x + 6x \cdot 12^x \ln(12) \\ &\text{és} \\ (e^{3x})' &= 3e^{3x} \end{aligned}$$

7. Logaritmikus derivált

A kérdés: Mi lesz az $f(x) = h(x)^{g(x)}$ függvény deriváltja? Pl. $\left((7x+3)^{\sin(x)}\right)' = ?$

- 1. módszer:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x)^{g(x)} && \backslash \text{vegyük mindkét oldal logaritmusát.} \\ \ln(f(x)) &= \ln(h(x)^{g(x)}) = g(x) \ln(h(x)) && \backslash \text{deriváljuk a két oldalt.} \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= (\ln(f(x)))' = (g(x) \ln(h(x)))' = g'(x) \ln(h(x)) + g(x) \frac{h'(x)}{h(x)} && \backslash \text{szorozzunk } f(x)\text{-szel.} \\ f'(x) &= f(x) \left(g'(x) \ln(h(x)) + g(x) \frac{h'(x)}{h(x)} \right) \end{aligned}$$

- 2. módszer:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x)^{g(x)} = \left(e^{\ln(h(x))}\right)^{g(x)} = e^{g(x) \ln(h(x))} \\ f'(x) &= \left(e^{g(x) \ln(h(x))}\right)' \stackrel{(*)}{=} e^{g(x) \ln(h(x))} (g(x) \ln(h(x)))' = e^{g(x) \ln(h(x))} \left(g'(x) \ln(h(x)) + g(x) \frac{h'(x)}{h(x)}\right) \end{aligned}$$

(*) az összetett függvények deriválási szabályából következik, a külső függvény a $\gamma(z) = e^z$, a belső: $\phi(x) = g(x) \ln(h(x))$.

6. Feladat: Határozzuk meg

- $f(x) = x^x$
- $f(x) = \left(\ln(x)^{\sin(x)}\right)$
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Megoldás:

(a) Megoldás az első módszerrel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^x && \backslash \text{vegyük mindkét oldal logaritmusát.} \\ \ln(f(x)) &= \ln(x^x) = x \ln(x) && \backslash \text{deriváljuk a két oldalt.} \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= (\ln(f(x)))' = (x \ln(x))' = \ln(x) + x \frac{1}{x} && \backslash \text{szorozzunk } f(x)\text{-szel.} \\ (x^x)' &= f'(x) = x^x (\ln(x) + 1) \end{aligned}$$

Megoldás a második módszerrel:

$$\begin{aligned} x^x &= e^{x \ln(x)} \\ f'(x) &= \left(e^{x \ln(x)}\right)' = e^{x \ln(x)} (x \ln(x))' = x^x (\ln(x) + 1) \end{aligned}$$

(b) Megoldás az első módszerrel:

$$f(x) = \ln(x)^{\sin(x)}$$

\ vegyünk mindkét oldal logaritmusát.

$$\ln(f(x)) = \ln(\ln(x)^{\sin(x)}) = \sin(x) \ln(\ln(x))$$

\ deriváljuk a két oldalt.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln(f(x)))' = (\sin(x) \ln(\ln(x)))' = \cos(x) \ln(\ln(x)) + \sin(x) \frac{1}{\ln(x)}$$

\ szorozzunk $f(x)$ -szel.

$$f'(x) = (\ln(x)^{\sin(x)}) \left(\cos(x) \ln(\ln(x)) + \sin(x) \frac{1}{x \ln(x)} \right)$$

Megoldás a második módszerrel:

$$\ln(x)^{\sin(x)} = e^{x \ln(x)}$$

$$f'(x) = (e^{\sin x \ln \ln(x)})' = (e^{\sin x \ln \ln(x)}) (\sin x \ln \ln(x))' = (\ln(x)^{\sin(x)}) \left(\cos(x) \ln(\ln(x)) + \sin(x) \frac{1}{x \ln(x)} \right)$$

(c) $f(x) = \sqrt[x]{x^2} = x^{\frac{2}{x}}$

$$f(x) = x^{\frac{2}{x}}$$

\ vegyünk mindkét oldal logaritmusát.

$$\ln(f(x)) = \ln\left(x^{\frac{2}{x}}\right) = \frac{2}{x} \ln(x)$$

\ deriváljuk a két oldalt.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln(f(x)))' = \left(\frac{2}{x} \ln(x)\right)' = -\frac{2}{x^2} \ln(x) + \frac{2}{x} \frac{1}{x} = -\frac{2}{x^2} \ln(x) + \frac{2}{x^2}$$

\ szorozzunk $f(x)$ -szel.

$$f'(x) = x^{\frac{2}{x}} \left(-\frac{2}{x^2} \ln(x) + \frac{2}{x^2} \right) = x^{\frac{2}{x}} \left(-\frac{2}{x^2} \ln(x) + \frac{2}{x^2} \right)$$

2. módszer:

$$f(x) = x^{\frac{2}{x}} = (e^{\ln(x)})^{\frac{2}{x}} = e^{\frac{2}{x} \ln(x)}$$

$$f'(x) = (e^{\frac{2}{x} \ln(x)})' \underset{(*)}{=} e^{\frac{2}{x} \ln(x)} \left(\frac{2}{x} \ln(x) \right)' = e^{\frac{2}{x} \ln(x)} \left(-\frac{2}{x^2} \ln(x) + \frac{2}{x^2} \right)$$

8. L'Hôpital szabály

Emlékeztető:

8.1. Tétel (A L'Hôpital szabály erős alakja). *Tegyük fel, hogy $f(a) = g(a) = 0$, és f és g differenciálható a valamely környezetében (kivéve esetleg a -t), és $g'(x)$ nem 0 ebben a környezetben ha $x \neq 0$. ekkor*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Felhasználhatjuk pl. az alábbi alakú határértékek meghatározására:

- "0/0" (lásd (a), (b), (c), (g))
- " $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ "
- " $\infty - \infty$ " (lásd (d))
- " $\infty 0$ " (lásd (e), (f))

7. Feladat: Határozzuk meg az alábbi határértékeket.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{2x + 6x^2}$

- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2+3x^3}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{2x}-1} - \frac{1}{2x}$
 (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$
 (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctg(x) \right)$
 (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{4x^3 + 6x^4}$

Megoldás:

(a) $(x^3 - 1)|_{x=1} = 0$ és $(x - 1)|_{x=1} = 0$, tehát a határérték " $\frac{0}{0}$ " alakú. Így a L'H szabályt alkalmazva:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{1} = 3$$

(b) $\sin(5x)|_{x=0} = 0$ és $2x + 6x^2|_{x=0} = 0$, így az előző feladathoz hasonlóan:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{2x + 6x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos(5x)}{12x + 2} = \frac{5}{2}.$$

(c) $(\ln(1+x) - x)|_{x=0} = 0$ és $(x^2 + 3x^3)|_{x=0} = 0$, így megint " $\frac{0}{0}$ " alakú a határérték, így L'Hôpitalunk:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2 + 3x^3} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x + 9x^2}.$$

Mivel $(\frac{1}{1+x} - 1)|_{x=0} = 0$ és $(2x + 9x^2)|_{x=0} = 0$, újból L'Hôpitalunk:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x + 9x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2 + 18x} = -\frac{1}{2}$$

(d) $(e^{2x} - 1)|_{x=0} = 0$ és $(2x)|_{x=0} = 0$, tehát a határértékünk " $\frac{1}{0} - \frac{1}{0}$ " vagyis " $\infty - \infty$ " alakú. Ebben a formában még nem használhatjuk a L'Hôpital szabályt, hanem először megfelelő " $\frac{0}{0}$ " vagy " $\frac{\infty}{\infty}$ " alakra kell hoznunk! Hozzuk közös nevezőre a két tagot:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x(e^{2x} - 1)} - \frac{(e^{2x} - 1)}{2x(e^{2x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - (e^{2x} - 1)}{2x(e^{2x} - 1)},$$

ami mostmár " $\frac{0}{0}$ " alakú. Erre alkamazzuk a L'Hôpital szabályt (kétszer)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - (e^{2x} - 1)}{2x(e^{2x} - 1)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2e^{2x}}{2(e^{2x} - 1) + 2xe^{2x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4e^{2x}}{4e^{2x} + 4e^{2x} + 8xe^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4e^{2x}}{8e^{2x}(x+1)} = -\frac{1}{2}.$$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = 0$, a határértékünk " $0 \cdot \infty$ " alakú, melyet " $\frac{0}{0}$ " vagy " $\frac{\infty}{\infty}$ " alakúra kell hoznunk, hogy tudjuk használni a L'Hôpital szabályt. Egy lehetséges megoldás, hogyha felhasználjuk, hogy

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x}},$$

vagyis

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}.$$

Ez a határérték már " $\frac{0}{0}$ " alakú, így:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

(f) A határérték $\infty \cdot 0$ alakú, mert $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} - \arctg(x) = 0$, tehát az előbbi feladathoz hasonlóan " $\frac{0}{0}$ " alakra hozzuk, majd egyszer L'Hôpitalunk és az utolsó lépésben kiemelünk x^2 -et.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctg(x) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} = 1.$$

(g) " $\frac{0}{0}$ " alakú a határérték, így L'Hôpitalunk.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{4x^3 + 6x^4} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{12x^2 + 24x^3} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{24x + 72x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{24 + 144x} = \frac{1}{24}$$

8. Feladat: Tegyük folytonossá az alábbi függvényeket. (Lásd az 5. ábrát)

(a) Hogy válaszszuk meg b értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x^2+x^4}, & \text{ha } x \neq 0 \\ b, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

(b) Hogy válasszuk meg a és b értékét, úgy, hogy az alábbi függvény folytonos legyen?

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{ha } x < 0, \\ ax + b, & \text{ha } 0 \leq x \leq \pi, \\ \frac{\sin(x-\pi)}{x^2-\pi^2}, & \text{ha } x > \pi. \end{cases}$$

Megoldás:

(a) Mivel x^2 , $\sin(x)$ és $x^2 + x^4$ folytonos függvények, az egyetlen pont ahol f esetleg nem folytonos az $x_0 = 0$ pont. Ahhoz, hogy f folytonos legyen az $x_0 = 0$ pontban úgy kell megválasztanunk a $b = f(x_0) = f(0)$ értéket, hogy teljesüljön, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = b.$$

Ehhez számoljuk ki a fenti határértéket a L'Hôpital szabály kétszeri alkalmazásának segítségével:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2 + x^4} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2)2x}{2x + 4x^3} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)2x + 2\cos(x)}{12x + 2} = 1. \quad (8.1)$$

Vagyis az f folytonos akkor és csak akkor, ha $b = 1$.

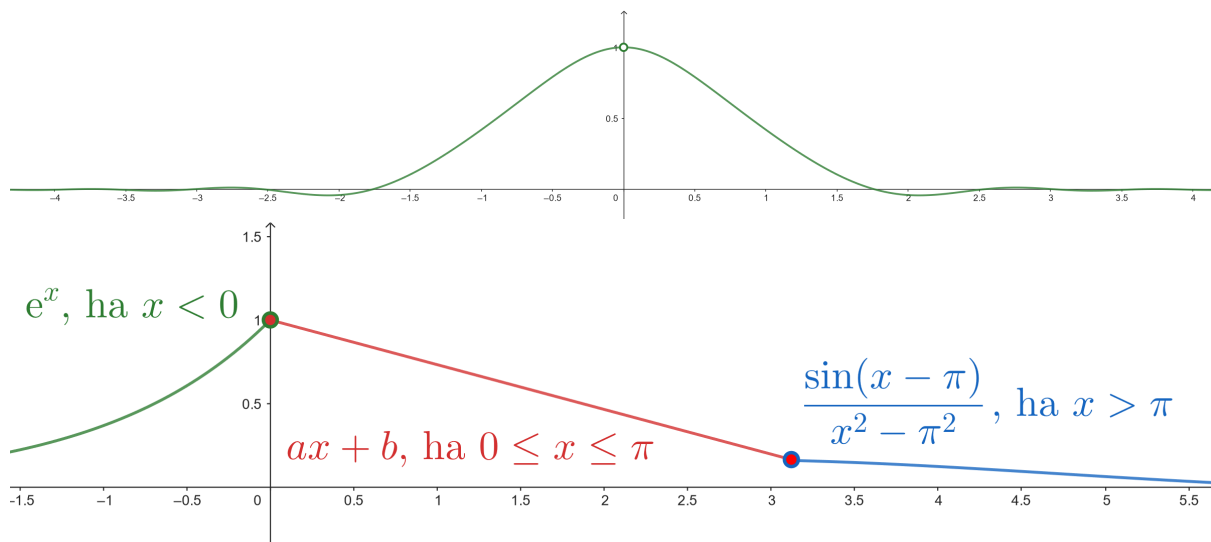
(b) Hasonlóan az előző feladathoz úgy kell megválasztanunk az a és b értékeket, hogy az alábbiak teljesüljenek:

$$a \cdot 0 + b = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \quad (8.2)$$

$$a \cdot \pi + b = \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x^2 - \pi^2} \quad (8.3)$$

(8.2): $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$, tehát $b = 1$.

(8.3) A másik határérték meghatározásához a L'Hôpital szabályt használjuk (egyszer), mivel a határértékünk $\frac{0}{0}$ alakú. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x^2 - \pi^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos(x-\pi)}{2x} = \frac{1}{2\pi}$, vagyis $a \cdot \pi + b = a \cdot \pi + 1 = \frac{1}{2\pi}$, melyet átrendezve kapjuk, hogy $a = \frac{1-2\pi}{2\pi^2}$.



5. ábra. 8. Feladat (a) és (b)

9. Függvényvizsgálat

9.1. Monotonitás és lokális szélsőértékek

Emlékeztető:

9.1. Definíció. Az f függvény $\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton nő} \\ \text{monoton csökken} \end{array} \right\}$ az I intervallumon, hogyha minden $x, y \in I$ esetén, ha $x \leq y$ akkor $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq f(y) \\ f(x) \geq f(y) \end{array} \right\}$.

9.2. Állítás. Ha f deriválható I -n és minden $x \in I$ esetén $\left\{ \begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{array} \right\}$ akkor f az I -n $\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton nő} \\ \text{monoton csökken} \end{array} \right\}$.

9.3. Definíció. f -nek $\left\{ \begin{array}{l} \text{lokális minimuma} \\ \text{lokális maximuma} \end{array} \right\}$ van az x_0 pontban, hogyha létezik egy olyan x_0 -t tartalmazó I intervallum, hogy minden $x \in I$ -re $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq f(x_0) \\ f(x) \leq f(x_0) \end{array} \right\}$.

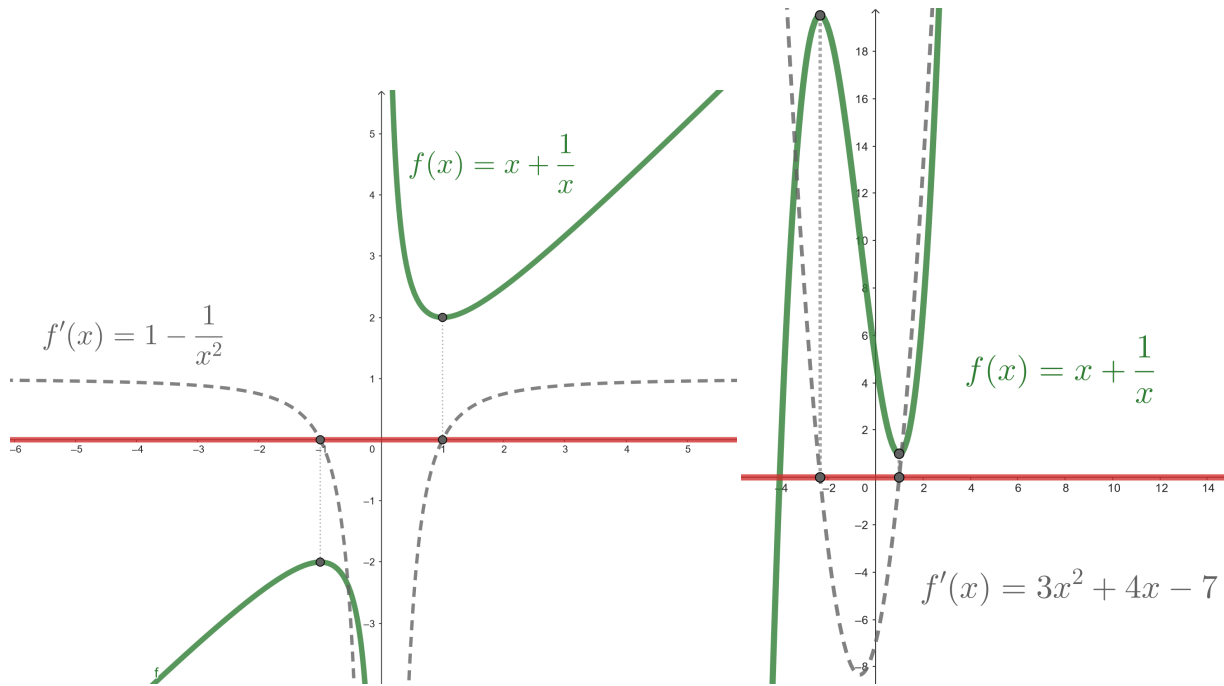
9.4. Állítás. Ha x_0 -ban $f'(x) = 0$ és $\left\{ \begin{array}{l} f''(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{array} \right\}$ akkor f -nek x_0 -ban $\left\{ \begin{array}{l} \text{lokális minimuma} \\ \text{lokális maximuma} \end{array} \right\}$ van.

9. Feladat: Határozzuk meg, hogy hol monoton növekszik, hol monoton csökken, hol van lokális minimumuk és hol van lokális maximumuk az alábbi függvényeknek!

(a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 5$

Megoldás:



6. ábra. 7. Feladat (a) és (b)

(a) Használjuk a 9.2 és a 9.4 állításokat.

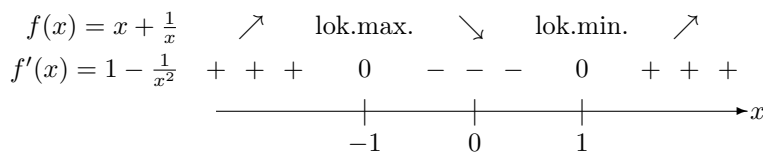
$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (9.1)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad (9.2)$$

$$f'(x_0) = 0 \iff 1 = \frac{1}{x_0^2} \iff x_0^2 = 1 \iff x_0 = \pm 1 \text{ és} \quad (9.3)$$

$$f'(x) \leq 0 \iff -1 \leq x \leq 1 \quad (9.4)$$

Ebből látható, hogy míg $x \leq -1$ a függvény monoton nő, majd monoton csökken és $x = 1$ után újra monoton nő. Tehát -1 -ben és 1 -ben valóban lokális maximum és lokális minimuma van a függvénynek. Ki is számolhatjuk a második deriváltakat a -1 -ben és az 1 -ben. A második derivált egy általános helyen $f''(x) = 2x^{-3}$, tehát $f''(-1) < 0$ és $f''(1) > 0$, ebből is látszik, hogy a -1 -ben és az 1 -ben a függvénynek lokális maximuma és lokális minimuma van.



(b) Használjuk a 9.2 és a 9.4 állításokat.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 5 \quad (9.5)$$

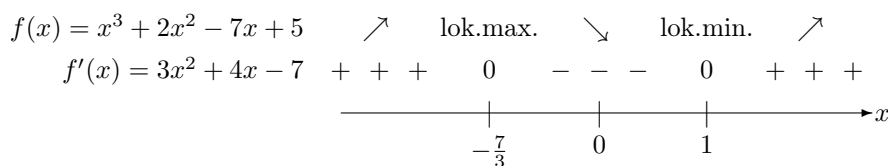
$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 7 \quad (9.6)$$

$$f'(x_0) = 0 \iff x_0 = \pm \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{6} \iff x_{0,1} = 1, x_{0,2} = -\frac{7}{3} \text{ vagyis } (*) \quad (9.7)$$

$$f'(x) \leq 0 \iff -\frac{7}{3} \leq x \leq 1 \quad (9.8)$$

(*): mivel az $f'(x)$ parabola főegyütthatója $3 > 0$, az $f'(x) \geq 0$ a két gyök között. $f''(x) = 6x + 4$, tehát $f''(x_{0,1}) = \frac{-42}{3} + 4 < 0$ és $f''(x_{0,2}) = 10 > 0$, így $x_{0,1} = -\frac{7}{3}$ lokális maximum, míg

$x_{0,2} = 1$ lokális minimum.



Megjegyzés: Abból, hogy a függvény deriváltja 0 egy adott pontban nem következik, hogy abban a pontban lokális szélsőértéke van, lásd: x^3 az $x_0 = 0$ pontban.

9.2. Konvexitás

Emlékeztető:

9.5. Definíció. Az f függvény $\begin{cases} \text{konvex} \\ \text{konkáv} \end{cases}$ az I intervallumon, hogyha minden I -beli szelője a függvény grafikon $\begin{cases} \text{felett} \\ \text{alatt} \end{cases}$ van.

9.6. Állítás. Ha f deriválható I -n és minden $x \in I$ esetén $\begin{cases} f'(x) \text{ monoton növekvő} \\ f'(x) \text{ monoton csökkenő} \end{cases}$ vagyis $\begin{cases} f''(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{cases}$ akkor f az I -n $\begin{cases} \text{konvex} \\ \text{konkáv} \end{cases}$.

9.7. Definíció. Az f függvénynek inflexiós pontja van az x_0 pontban, hogyha ott konvexitást vált.

9.8. Állítás. Ha x_0 -ban $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor f -nek x_0 -ban inflexiós pontja van.

10. Feladat: Hol konvexek, konkávak és hol van inflexiós pontjuk az alábbi függvényeknek?

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 3x + 5$

(b) $f(x) = x^4$

(c) $f(x) = x(\ln(x))^2$.

Megoldás:

(a)

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 3x + 5$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 3$$

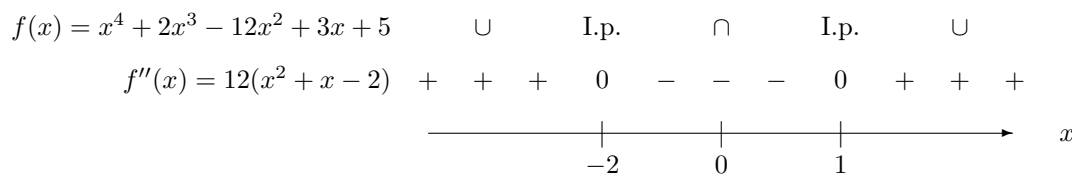
$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x^2 + x - 2)$$

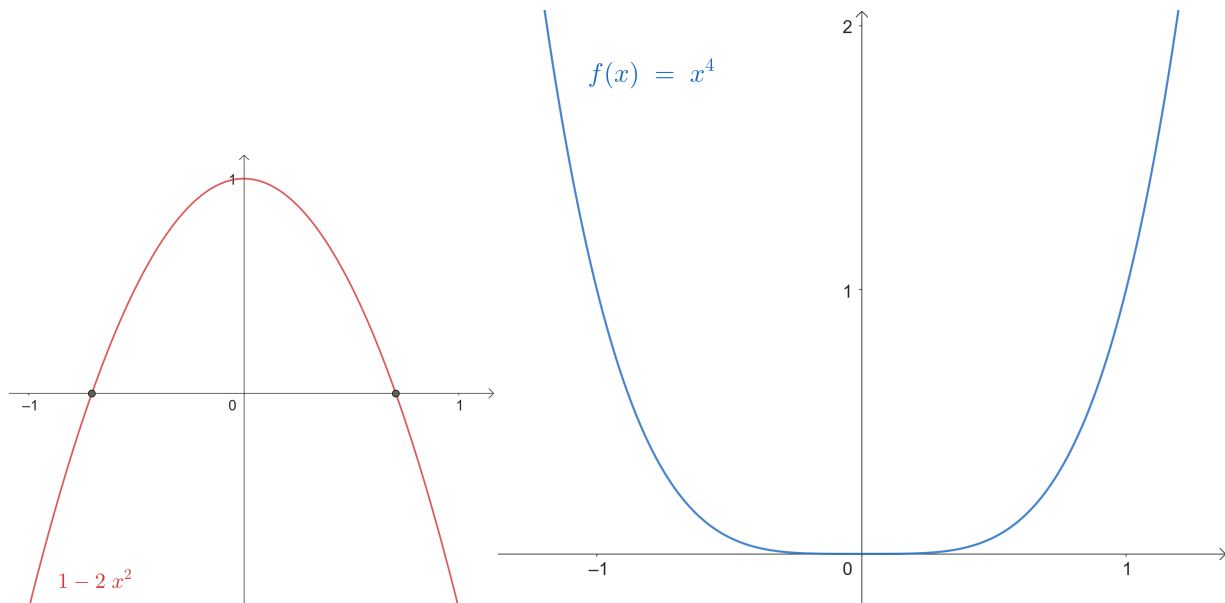
Keressük, hogy hol lesz $f''(x) = 0$, < 0 és > 0 .

$$f''(x) = 0 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff x = 1 \text{ vagy } x = -2.$$

Az $x^2 + x - 2$ parabola konvex, így $f''(x) < 0$ a két gyök között (lásd 7. ábra első alábrája). A második derivált előjele változik a két gyök között, vagyis a függvény konvexitást vált vagyis a két $(-2, 1)$ gyök helyén a függvénynek inflexiós pontja van.

Az $\cup$: konvex, $\cap$: konkáv I.p.: inflexiós pont jelöléssel:





8. ábra. Ábra a 11. Feladathoz

Megoldás:

- A függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$.
- Mivel $e^{-x^2} > 0$ minden x -re $f(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$, vagyis a függvényünk egyetlen zérushelye 0-ban van.
- Mivel az értelmezési tartomány a valós számok teljes halmaza: $\mathbb{R}$ így az értelmezési tartomány "szélei" a $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x^2}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2} 2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x^2} 2x} = 0$$

- A monotonitás vizsgálatához az első deriváltat kell alaposan szemügyre vennünk.

$$f'(x) = e^{-x^2} + x e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

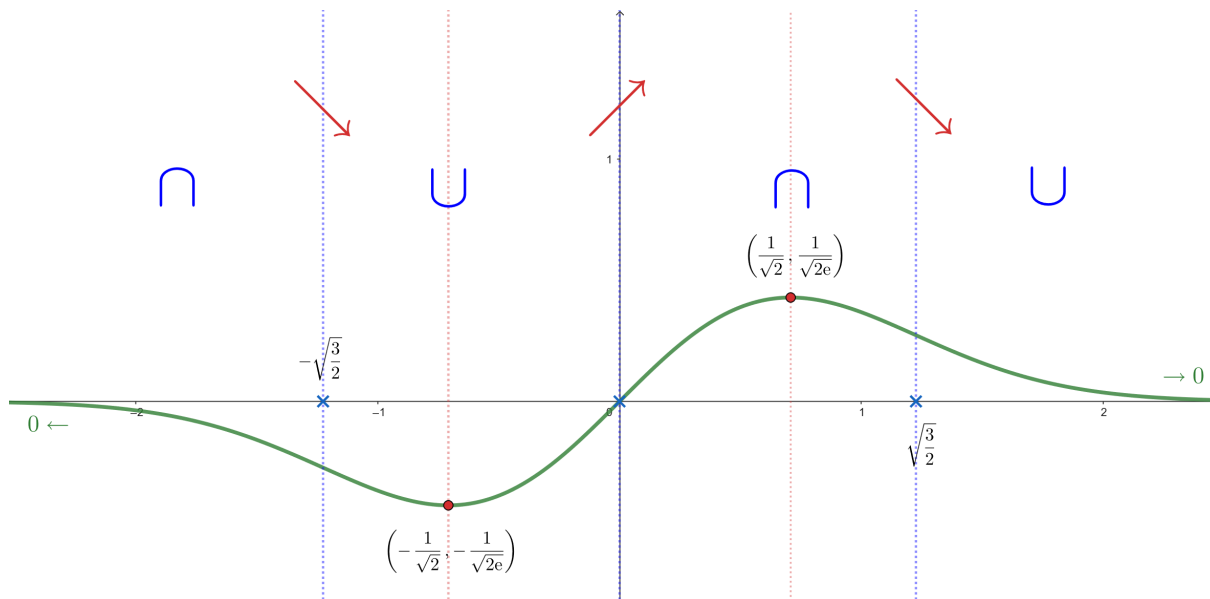
$e^{-x^2} > 0$ minden x -re, így a második derivált előjele az $(1 - 2x^2)$ előjelétől függ. $1 - 2x^2 = 0$ a.cs.a., ha $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mivel az $1 - 2x^2$ parabola konkáv, ezért $1 - 2x^2$ pozitív a két gyök $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ között. (lásd 8. ábra).

$f(x) = f(x) = x e^{-x^2}$	$\searrow$	Lok.min.	$\nearrow$	Lok.max.	$\searrow$								
$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	0	-	-	-
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0 $\frac{1}{\sqrt{2}}$													
x													

- A konvexitás vizsgálatához a második deriváltat:

$$f''(x) = e^{-x^2}(-2x)(1 - 2x^2) + e^{-x^2}(-4x) = 2x e^{-x^2}(2x^2 - 3). \quad (9.9)$$

A második derivált előjele az x és a $(2x^2 - 3)$ előjelétől függ. $(2x^2 - 3) = 0$, ha $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, a parabola konvex, így a két gyök között negatív a kifejezés.



9. ábra. Ábra a 11. Feladathoz, $f(x) = xe^{-x^2}$

$f(x) = xe^{-x^2}$	$\cap$	I.P	$\cup$	I.P	$\cap$	I.P	$\cap$								
$f''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
x	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$(2x^2 - 3)$	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+

• Összegezve:

$f(x)$	0			$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2e}}$		0			
$f(x)$		$\cap \searrow$	I.P	$\cup \searrow$	L.min	$\cup \nearrow$	I.P0	$\cap \nearrow$	L.max	$\cap \searrow$	I.P	$\cup \searrow$	
$f'(x)$	$\times$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	$\times$
$f''(x)$	$\times$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	$\times$

$-\infty$

$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

0

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$+\infty$

• Paritás: a függvény páratlan, mert $f(-x) = -xe^{-(-x)^2} = -xe^{-(x)^2} = -f(x)$.

10. Szöveges szélsőérték feladatok

12. Feladat: (a) Mekkora a területe a maximális területű téglalap alakú teleknek, amelyet körbe tudok keríteni 100 méter kerítéssel?
- (b) Mekkora a térfogata a maximális térfogatú hengernek amelyet ki tudok vágni egy R sugarú gömbből?

- (c) Mekkora a térfogata annak a maximális térfogatú négyzet alapú egyenes hasábnak amelynek a felülete $600 m^2$.

Megoldás:

(a) Lásd 10 első alábráját. Jelöljük a téglalap alakú telkünk egyik oldalhosszát a -val a másikat b -vel. A telkünk kerületét K -val, míg a területét T -vel. Ekkor

$$K = 2a + 2b = 100 \quad (10.1)$$

$$T = a \cdot b \quad (10.2)$$

A területet szeretnénk maximalizálni, feltéve, hogy a kerület $100m$ vagyis $b = 50 - a$. A kerületre vonatkozó feltétel alapján a függvény amelynek a maximumát keressük az $f(a) = a \cdot (50 - a)$. A maximumot az $f'(a_0) = 0$ pontban keressük, vagyis $f'(a_0) = 50 - 2a_0 = 0$ vagyis $a_0 = 25$. Ez alapján a maximális terület $T_{\max} = a_0(50 - a_0) = 25^2 = 625$.

A feladat *nem* kérdezte a b értékét, de ha erre is kíváncsiak vagyunk, akkor visszahelyettesíthetünk a képletbe: $b_0 = 50 - a_0 = 25 = a_0$, ez az a_0 és b_0 mely maximalizálja a terület függvényünket.

(b) Lásd 10 második alábráját.

Jelöljük a henger magasságát m míg az alapjának sugarát r -rel. Ekkor a henger térfogata $V = m \cdot r^2 \pi$. Szeretnénk, hogy a hengerünk beférjen egy adott R sugarú gömbbe, így a következőt tudjuk (lásd az ábrát):

$$R^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + r^2 \text{ ez alapján} \quad (10.3)$$

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2. \quad (10.4)$$

A terület képletbe visszahelyettesítve kapjuk, hogy a függvény melynek a maximumát keressük:

$$f(m) = m \left(R^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 \right) \pi. \quad (10.5)$$

Megnézzük, hogy a derivált hol lesz 0:

$$f'(m) = (R^2 - \frac{3m^2}{4})\pi \text{ vagyis} \quad (10.6)$$

$$f'(m_0) = 0 \iff m^2 = \frac{4}{3}R^2 \xrightarrow{m>0} m = \frac{2}{\sqrt{3}}R. \quad (10.7)$$

Így a maximális térfogat

$$V_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}R \left(R^2 - \frac{1}{3}R^2 \right) \pi = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}. \quad (10.8)$$

(c) Lásd 10 harmadik alábráját. Jelöljük az négyzet alaphoz tartozó két éle a -val és a magasságot b -vel (ábra!). Ekkor a hasábnak A -val jelölt felülete és V -vel jelölt térfogata:

$$A = 2a^2 + 4ab = 600(m^2) \quad (10.9)$$

$$V = a^2b. \quad (10.10)$$

A térfogatot szeretnénk maximalizálni. Láthatóan az A -t definiáló képletből sokkal könnyebben ki tudjuk fejezni b -t, tehát tegyük így b és a fgv amelynek a maximumát keressük:

$$b = \frac{600 - 2a^2}{4a} \quad (10.11)$$

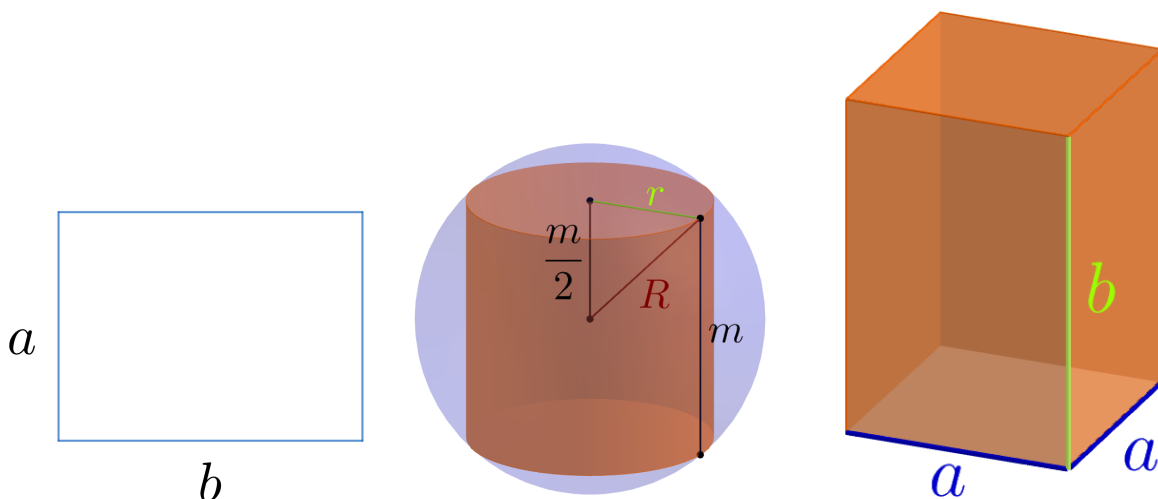
$$f(a) = a^2 \frac{600 - 2a^2}{4a} = \frac{600a - 2a^3}{4} \quad (10.12)$$

Keressük meg, hogy hol lesz 0 a derivált:

$$f'(a) = 150 - \frac{6}{4}a^2 \text{ tehát } f'(a_0) = 0 \iff \frac{6}{4}a^2 = 150 \iff a^2 = 100 \xrightarrow{a>0} a = 10. \quad (10.13)$$

Így a maximális térfogat:

$$V_{\max} = \frac{600 \cdot 10 - 2 \cdot 10^3}{4} = 1000. \quad (10.14)$$



10. ábra. 12. Feladat (a), (b) és (c).

11. Implicit függvény deriválása

13. Feladat: Határozzuk meg az y' -t az implicit deriválás módszerével az adott pontban.

(a) $x^2 + y^2 = 100$, $(x, y) = (6, 8)$

(b) $x^2y + xy^2 + 2x + 3y = 14$, $(x, y) = (1, 2)$

(c) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, $(x, y) = (2, 3)$

Megoldás:

(a)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2(x) &= 100 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} \\ 2x + 2y(x)y'(x) = 0 \end{array} \right. & \text{\textbackslash kifejezzük } y'(x)\text{-et} \\ y'(x) &= -\frac{x}{y(x)} \end{aligned}$$

Tehát a $(6, 8)$ -beli derivált $-\frac{6}{8}$.

(b)

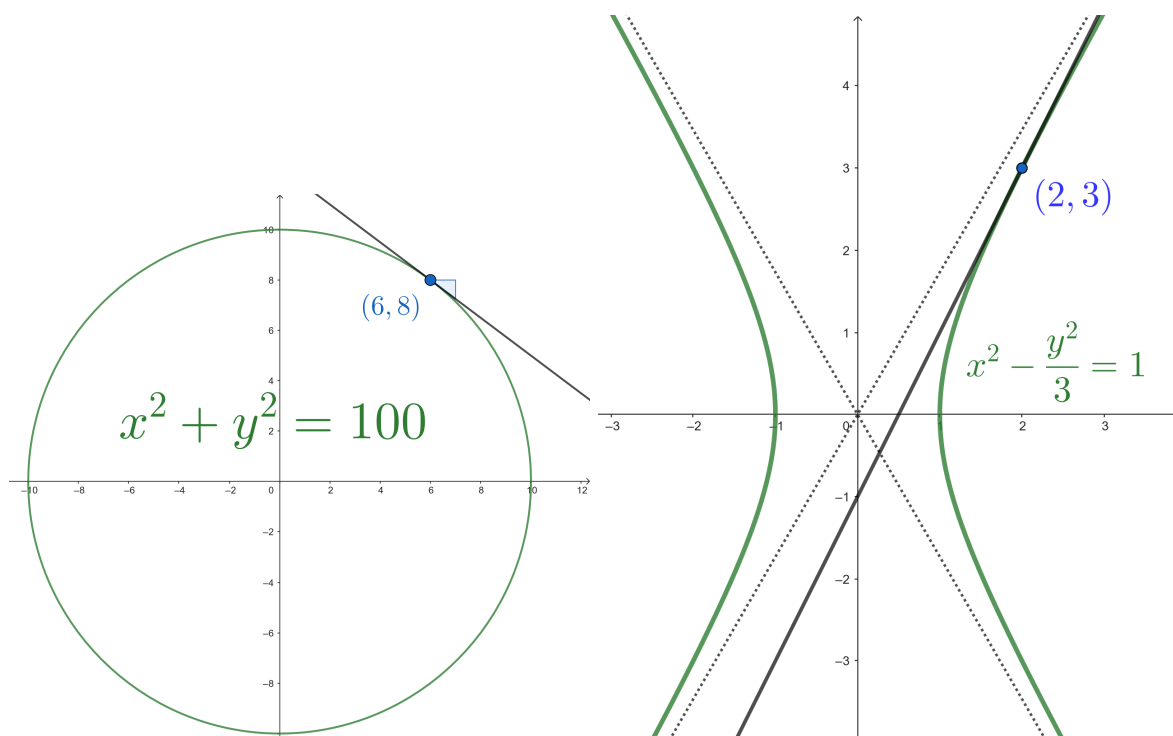
$$\begin{aligned} x^2y(x) + xy^2(x) + 2x + 3y(x) &= 14 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} \\ 2xy(x) + x^2y'(x) + 2xy(x) + 2x2y(x)y'(x) + 2 + 3y'(x) = 0 \end{array} \right. & \text{\textbackslash kiemeljük } y'(x)\text{-et} \\ y'(x) [x^2 + x2y(x) + 3] + 2xy(x) + y^2(x) + 2 &= 0 & \text{\textbackslash kifejezzük } y'(x)\text{-et} \\ y'(x) &= -\frac{2xy(x) + y^2(x) + 2}{x^2 + x2y(x) + 3} \end{aligned}$$

Így az $(1, 2)$ -beli derivált $-\frac{10}{8} = -\frac{5}{4}$.

(c)

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{y^2}{3} &= 1 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} \\ 2x - \frac{2y(x)y'(x)}{3} = 0 \end{array} \right. & \text{\textbackslash kifejezzük } y'(x)\text{-et} \\ y'(x) &= \frac{3x}{y(x)} \end{aligned}$$

Tehát a $(2, 3)$ -beli derivált $\frac{6}{3} = 2$.



11. ábra. 13. Feladat (a) és (c).

12. Paraméteresen adott függvény deriváltja

Jelölések:

az y x változó szerinti deriváltja: $y' := \frac{dy}{dx}$

az y t változó szerinti deriváltja: $\dot{y} := \frac{dy}{dt}$

az x t változó szerinti deriváltja: $\dot{x} := \frac{dx}{dt}$

14. Feladat: Határozzuk meg az $y' = \frac{dy}{dx}$ -t az adott pontban. (Vagy másképpen határozzuk meg a paraméteresen megadott görbe érintőjének meredekségét az adott pontban).

(a) $x(t) = 10 \cos(t)$, $y(t) = 10 \sin(t)$, $t_0 = \frac{\pi}{6}$

(b) $x(t) = \cosh(t)$, $y(t) = \sqrt{3} \sinh(t)$, $t_0 = \ln(2)$

(c) $x(t) = t \cos(x)$, $y(t) = t \sin(t)$, $t_0 = \frac{4\pi}{6}$

Megoldás:

(a) $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

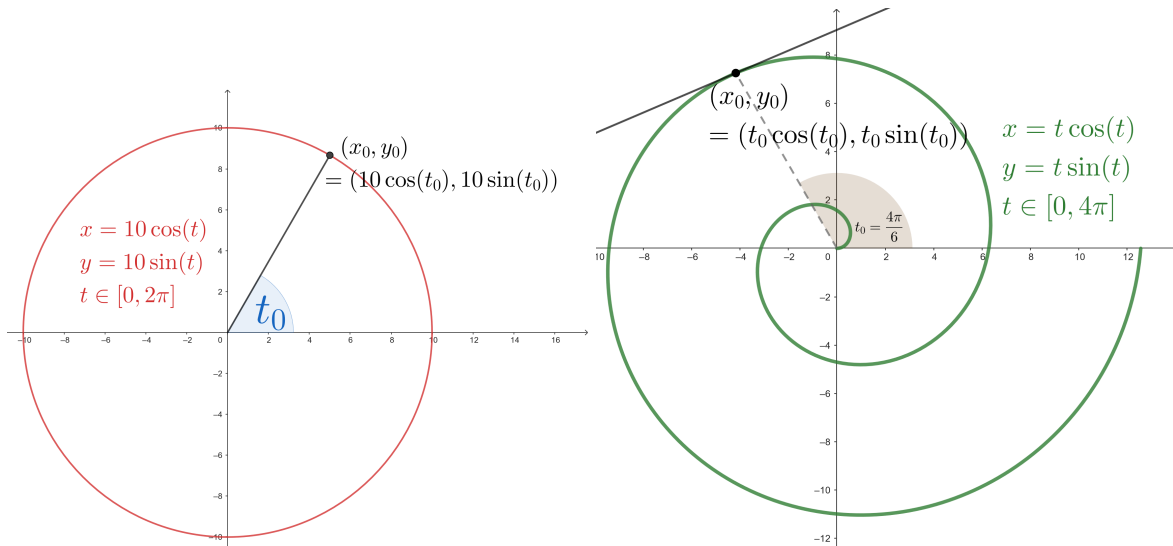
$$\dot{x} = -10 \sin(t)$$

$$\dot{y} = 10 \cos(t), \text{ tehát}$$

$$y' = -\frac{10 \cos(t)}{10 \sin(t)} = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)}.$$

Vagyis a $t_0 = \frac{\pi}{6}$ pontban:

$$y'|_{t_0=\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{3} \quad (12.1)$$



12. ábra. 14. Feladat (a) és (c).

(b) $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sinh(t) \\ \dot{y} &= \sqrt{3} \cosh(t), \text{ tehát} \\ y' &= \frac{\sqrt{3} \cosh(t)}{\sinh(t)}.\end{aligned}$$

Mivel $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ és $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ a $t_0 = \ln(2)$ pontban:

$$y'|_{t_0=\ln(2)} = \frac{5}{\sqrt{3}} \quad (12.2)$$

(c) $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos(t) - t \sin(t) \\ \dot{y} &= \sin(t) + t \cos(t), \text{ tehát} \\ y' &= \frac{\sin(t) + t \cos(t)}{\cos(t) - t \sin(t)}.\end{aligned}$$

Vagyis a $t_0 = \frac{4\pi}{6}$ pontban:

$$y'|_{t_0=\frac{4\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}}{-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{\sqrt{3}}} \quad (12.3)$$

13. Taylor polinomok

Emlékeztető: Az f függvény a pont körüli n -edfokú Taylor polinomja a

$$T_{a,n}^f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n,$$

ahol $f^{(n)}(a)$ az f függvény n -edik deriváltja az a helyen.

13.1. Tétel (Taylor tétel). *Ha*

- f $n+1$ -szer deriválható (a, b) -n, és
- $f^{(n)}$ folytonos $[a, b]$ -n,

akkor létezik $c \in (a, b)$

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\ &= T_{a,n}^f(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

15. Feladat: Határozzuk meg az f fgv a körüli n -edfokú Taylor polinomját

- (a) $f(x) = \cos(x)$, $a = \pi$, $n = 4$
- (b) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 6x + 8$, $a = 0$, $n = 4$
- (c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 1$, $n = 3$
- (d) $f(x) = e^x$, $a = 0$, $n \in \mathbb{N}$
- (e) $f(x) = \sin(3x)$, $a = 0$, $n = 5$
- (f) $f(x) = e^{-x}$, $a = 0$, $n \in \mathbb{N}$
- (g) $f(x) = \cosh(x)$, $a = 0$, $n \in \mathbb{N}$

Megoldás:

(a)

$$f(x) = \cos(x), a = \pi, n = 4$$

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(\pi)$	$f^{(k)}(\pi) \frac{(x-\pi)^k}{k!}$
0	$\cos(x)$	-1	-1
1	$-\sin(x)$	0	0
2	$-\cos(x)$	1	$\frac{(x-\pi)^2}{2}$
3	$\sin(x)$	0	0
4	$\cos(x)$	-1	$-\frac{(x-\pi)^4}{4!}$

Vagyis:

$$T_{\pi,4}^f(x) = -1 + 0 + \frac{(x-\pi)^2}{2} + 0 - \frac{(x-\pi)^4}{4!} \quad (13.1)$$

(b)

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 6x + 8, a = 0, n = 4$$

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$	$f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$
0	$x^4 + 2x^2 + 6x + 8$	8	8
1	$4x^3 + 4x + 6$	6	$6x$
2	$12x^2 + 4$	4	$\frac{4}{2}x^2 = 2x^2$
3	$24x$	0	0
4	24	24	$\frac{24}{24}x^4 = x^4$

Vagyis a Taylor polinom maga a függvény. Ez nem meglepő, hiszen a függvény egy negyedfokú polinom, amit a negyedfokú polinomok közül maga közelít minden szempontból a legjobban.

$$T_{0,4}^f(x) = x^4 + 2x^2 + 6x + 8 \quad (13.2)$$

(c)

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, a = 1, n = 3$$

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(1)$	$f^{(k)}(1) \frac{(x-1)^k}{k!}$
0	$x^{\frac{1}{3}}$	1	1
1	$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}(x-1)$
2	$-\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}(x-1)^2$
3	$\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{3} x^{-\frac{8}{3}}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{5}{3^4}(x-1)^3$

$$T_{1,3}^f(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{3^4}(x-1)^3 \quad (13.3)$$

(d)

Mivel az e^x függvény deriváltja saját maga, ezért akárhányszor deriválom mindig saját magát kapom. Vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ -re:

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$	$f^{(k)}(0) \frac{(x-0)^k}{k!}$
0	e^x	1	1
1	e^x	1	x
2	e^x	1	$\frac{x^2}{2!}$
n	e^x	1	$\frac{x^n}{n!}$

$$T_{0,n}^f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

(e)

$$f(x) = \sin(3x), a = 0, n = 5$$

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(\pi)$	$f^{(k)}(\pi) \frac{(x-\pi)^k}{k!}$
0	$\sin(3x)$	0	0
1	$3 \cos(3x)$	3	$3x$
2	$-3^2 \sin(x)$	0	0
3	$-3^3 \cos(x)$	-3^3	$-\frac{(3x)^3}{3!}$
4	$3^4 \sin(x)$	0	0
5	$3^5 \cos(x)$	3^5	$\frac{(3x)^5}{5!}$

Vagyis

$$T_{0,5}^f(x) = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!}. \quad (13.4)$$

A $\sin(x)$ 0 körüli Taylor polinomjának k -adik tagja

$$\begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros} \\ 1 \cdot \frac{x^k}{k!}, & \text{ha } k-1 \text{ osztható 4-gyel} \\ -1 \cdot \frac{x^k}{k!}, & \text{ha } k-1 \text{ osztható 2-vel, de 4-gyel nem.} \end{cases} \quad (13.5)$$

$$T_{0,n}^f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \text{ ha } n-2 \text{ osztható 4-gyel} \\ -\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \text{ ha } n-2 \text{ osztható 2-vel, de 4-gyel nem} \end{array} \right\} \text{ ha } n \text{ páros} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^n}{n!}, \text{ ha } n-1 \text{ osztható 4-gyel} \\ -\frac{x^n}{n!}, \text{ ha } n-1 \text{ osztható 2-vel, de 4-gyel nem.} \end{array} \right\} \text{ ha } n \text{ páratlan} \end{array} \right\}$$

Ezek szerint, hogyha tudjuk $\sin(x)$ Taylor polinomját, akkor $\sin(3x)$ Taylor polinomját ennek segítségével is kiszámolhatjuk, hogyha az y hely helyett a $3y$ helyen vesszük:

$$T_{0,n}^{\sin(x)}(3y) = T_{0,n}^{\sin(3x)}(y).$$

(f)

Emlékezzünk, hogy $T_{0,n}^{e^x}(y) = \sum_{k=0}^n \frac{y^k}{k!} = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots + \frac{y^n}{n!}$
Hasonlóan az előző feladathoz:

$$T_{0,n}^{e^{-x}}(y) = T_{0,n}^{e^x}(-y) = 1 + (-y) + \frac{(-y)^2}{2!} + \frac{(-y)^3}{3!} + \dots + \frac{(-y)^n}{n!} \quad (13.6)$$

$$= 1 - y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^5}{5!} + \dots \quad (13.7)$$

(g)

Felhasználva, hogy

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T_{0,n}^{\cosh(x)}(y) &= \frac{T_{0,n}^{e^x} + T_{0,n}^{e^{-x}}}{2} = \frac{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!}}{2} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k + (-1)^k x^k}{2 \cdot (k!)} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ páros}}} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

16. Feladat: A 15. feladatban kiszámolt Taylor polinomok segítségével becsüljük meg az alábbi értékeket.

(a) $\cos(\pi + 0.01)$

(b) $\sqrt[3]{1.2}$

(c) $e^{-0.04}$, $n = 2$

Megoldás:

(a)

A negyedfokú Taylor polinom: $T_{\pi,4}^f(x) = -1 + 0 + \frac{(x-\pi)^2}{2} + 0 - \frac{(x-\pi)^4}{4!}$. Vagyis, hogyha a Taylor polinommal szeretnénk megbecsülni $\cos(\pi + 0.01)$ értékét, akkor azt kell megnéznünk, hogy mennyi $T_{\pi,4}^f(\pi + 0.01)$ értéke, vagyis

$$\begin{aligned} T_{\pi,4}^f(\pi + 0.01) &= -1 + 0 + \frac{(\pi + 0.01 - \pi)^2}{2} + 0 - \frac{(\pi + 0.01 - \pi)^4}{4!} \\ &= -1 + \frac{(0.01)^2}{2} - \frac{(0.01)^4}{4!} \sim -1 + 0.00005 - 4.16 \cdot 10^{-10} \sim -0.999950000416. \end{aligned}$$

($\sim$ azt jelenti, hogy megközelítőleg)

(b)

$\sqrt[3]{1.2}$ -t szeretnénk becsülni így a $T_{1,3}^{\sqrt[3]{y}}(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{3^4}(x-1)^3$ Taylor polinomt fogjuk használni. Vagyis arra vagyunk kíváncsiak ebben az esetben, hogy mennyi $T_{1,3}^{\sqrt[3]{y}}(1.2)$.

$$T_{1,3}^{\sqrt[3]{y}}(1.2) = 1 + \frac{1}{3}(1.2-1) - \frac{1}{9}(1.2-1)^2 + \frac{5}{3^4}(1.2-1)^3 \quad (13.8)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}(0.2) - \frac{1}{9}(0.2)^2 + \frac{5}{3^4}(0.2)^3 \quad (13.9)$$

$$\sim 1 + 0.066\dots - 0.0044\dots + 0.00049\dots \quad (13.10)$$

$$\sim 1.062716 \quad (13.11)$$

(c)

$$T_{0,2}^{\mathrm{e}^y}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$T_{0,2}^{\mathrm{e}^y}(-0.04) = 1 - 0.04 + \frac{0.04^2}{2} = 0.9608 \quad (13.12)$$